Laboratorio 3

Oscilaciones de una cuerda tensa

3.1 Objetivos

1. Determinar los modos normales de vibración de una cuerda fija en ambos extremos.

2. Verificar experimentalmente la relación de la frecuencias en estado de resonancia de las cuerdas con respecto a los parámetros: tensión, longitud y densidad.

3. Encontrar la densidad de la cuerda utilizada.

3.2 Preinforme

1. ¿A qué se denomina resonancia ?. Explique.

2. ¿Cuál es la diferencia entre ondas estacionarias y ondas viajeras ?.

3. Mediante diagramas explique los modos de resonancia de una cuerda fija en ambos extremos.

3.3 Fundamento Teórico

Considérese una cuerda de longitul L y densidad lineal de masa μ, sujeta en los extremos $x = 0$ y $x = L$. La cuerda se hace oscilar en un punto por medio de un vibrador conectado a un generador de ondas senoidales. En estas condiciones, el sistema se constituye en un oscilador forzado. Un análisis de las ondas incidentes y reflejadas que se forman en la cuerda [1] lleva a la siguiente función de onda como solución de la ecuación diferencial unidimensional de onda:

[1] ver FISICA volumen II: campos y ondas Alonso-Finn, sección 22.5

$$\psi(x,t) = (A\,Sen\,kx + B\,Cos\,kx)\,Sen\,\omega t. \tag{3.1}$$

Claramente $\psi(x,t)$ no describe una onda viajera ya que x y t no estan involucrados en el argumento de esta función en la forma $(x \pm vt)$. Esto da como resultado una amplitud que tiene la característica de ser fija para cada punto particular de la cuerda, pero variable de un punto a otro a lo largo de la misma. La expresión para la amplitud será entonces:

$$\phi(x,t) = (A\,Sen\,kx + B\,Cos\,kx). \tag{3.2}$$

Las constantes A y B se determinan con las condiciones iniciales.
Así, la expresión:

$$\psi(x,t) = \phi(x) Sen\,\omega t$$

indica que cada punto de la cuerda tiene un movimiento armónico transversal de frecuencia ω.
Cuando la cuerda esté en resonancia con el agente externo que produce el movimiento, se presentarán los distintos modos propios de oscilación y los desplazamientos transversales tendrán su máxima amplitud.
Para encontrar las frecuencias f_n correspondientes a los modos propios de oscilación se utilizan las siguientes condiciones de frontera:

- ψ(0,t)=0,
- ψ(L,t)=0.

De la primera condición de frontera se obtiene:

$$[A\,Sen\,k(0) + B\,Cos\,k(0)]Sen\,\omega t = B\,Sen\,\omega t = 0.$$

Por lo tanto $B = 0$ y la ecuación (3.1) queda de la siguiente manera:

$$\psi(x,t) = A\,Sen\,kx\,Sen\,\omega t.$$

De la segunda condición de frontera:

$$A\,Sen\,kL\,Sen\,\omega t = 0.$$

En esta ecuación A y $Sen\,\omega t$ deben ser diferentes de cero. Por tanto:

$$Sen\,kL = 0.$$

Lo cual es válido para $kL = n\pi$ con $n = 1, 2, 3...$

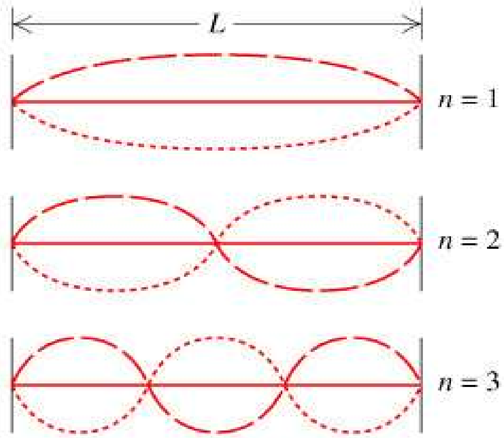

Figura 3.1: Ondas estacionarias en la cuerda.

Utilizando las expresiones del movimiento ondulatorio $k = 2\frac{\pi}{\lambda}$ y $v = \lambda\, f$, donde k y v son el número de onda y la velocidad de propagación de la onda respectivamente, se obtiene la siguiente expresión para las frecuencias correspondientes a los modos propios de oscilación de la cuerda:

$$f_n = \frac{nv}{2L}.$$

De la dinámica asociada a las ondas transversales en una cuerda, su velocidad de propagación a lo largo de la misma está dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Siendo T la tensión en la cuerda. La expresión para las frecuencias propias queda en definitiva

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, \tag{3.3}$$

donde $n = 1$ corresponde al modo fundamental:

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

y $n = 2$ corresponde al segundo armónico, $n = 3$ al tercero y asi sucesivamente, siendo cada uno de estos múltiplos de la fecuencia fundamental en la forma: $f_2 =$

Figura 3.2: Sensor de Fuerza

$2f_1$, $f_3 = 3f_1$ ... y así sucesivamente. También n es el número de vientres de las ondas estacionarias. Ver Figura 3.1.

3.4 Materiales

- Sensor de fuerza con su cable
- X plorer GLX con su fuente de alimentación
- Amplificador de potencia con un cable de dos salidas y su fuente de alimentacin
- Vibrador mecánico
- Cuerda (Longitud $L = 263.0 \pm 0.1 cm$, masa $m = 9.8726g$, error de calibración de la balanza $0.0002g$ y el error de resolución es $0.0001g$), portapesas y 6 masas
- Cinta métrica

3.5 Precauciones

- Utilice una señal senosoidal y coloque el extremo del vibrador lo más cerca posible a la polea.
- Cerciórese que la longitud de la cuerda sea la máxima posible.
- Observe que la cuerda esté en posición horizontal y sus extremos fijos se encuentren a la misma distancia del borde de la mesa.

Figura 3.3: Xplorer GLX

Figura 3.4: Amplificador de Potencia

Figura 3.5: Vibrador mecánico.

Figura 3.6: Montaje experimental: (1) Sensor de fuerza, (2) Xplorer GLX, (3) Amplificador de potencia, (4) Vibrador mecánico

3.6 Procedimiento

1. Monte el equipo como se sugiere en la Figura (3.6)

2. Conecte el vibrador mecánico al amplificador de potencia mediante dos cables (No hay polaridad)

3. El amplificador de potencia se debe conectar mediante el cable de dos salidas al Xplorer GLX a las dos entradas inferiores del lado izquierdo. Además se debe conectar mediante la fuente de alimentacin a 110 V.

4. Conecte el sensor de fuerza mediante un cable al Xplorer GLX a la entrada 1 ubicada en su parte superior.

5. Fije la tensión a un valor, mida la longitud entre los extremos fijos L.

6. **Configuración del Xplorer GLX**

   Al encender el Xplorer GLX oprima para visualizar the home screen (pantalla inicial)

   En la figura 3.7 se presenta la pantalla inicial, de los iconos mostrados se van a utilizar para esta práctica solamente: Settings (Configuracin), Digits (Medidor digital), Output (Salida), Sensors (sensores). Para moverse entre estos se usan las flechas, se confirma el movimiento oprimiendo y para

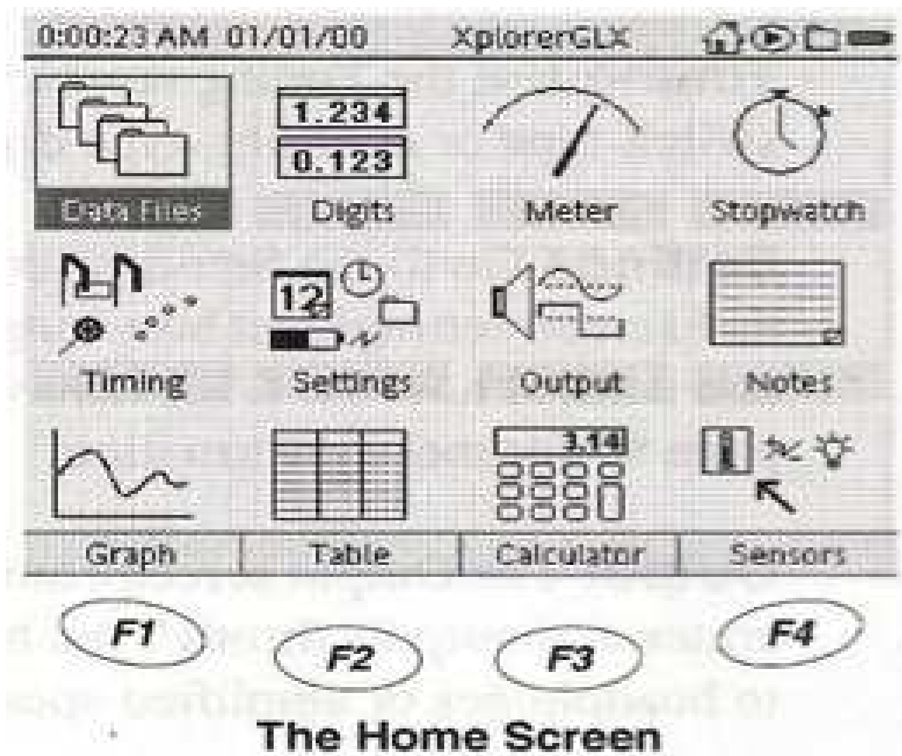

Figura 3.7: Pantalla inicial (Tomado del Xplorer GLX User's Guide)

volver a la pantalla inicial se usa el botón home . A continuación realice los siguientes pasos:

(a) Ir al icono **Configuración** oprima , observe que la opción Luz posterior esté en el modo ENCENDIDO, para esto baje con la flecha, oprima y el número 2. Para volver a la pantalla inicial oprima home.

(b) Ir al icono **Salida** oprima : Parámetros de trabajo: **Output Device** oprima se obtienen varias opciones, descienda hasta **Amplificador de Potencia** marque el número 4. Automáticamente se inicia el proceso de calibración. Es indispensable que se realice correctamente este proceso para la toma de datos.

Verifique las siguientes opciones:
Waveform: Sine
Amplitude (V): 5,00
Period units: Frequency (Hz)
Repeat Mode: Continuous
Wave polarity: Positive

Volver a la pantalla inicial home.

(c) Ir al icono **Sensores**
En la parte superior escoger el icono **Hz** (frecuencia del amplificador GLX). Verifique las siguientes opciones:

Unidad de frecuencia de muestra: Segundos
Frecuencia de muestreo: 1
Reducir/suavizar promediar: Apagar
Hz Frecuencia de salida: Visible

Volver a la pantalla inicial.

3.7 Toma de datos

- Ir al icono **Salida**, para que empiece a oscilar la cuerda oprima F1 (ON). Puede variar la frecuencia de oscilación en el ítem **Frequency** (Hz) con las teclas + - para aumentar o disminuir respectivamente. Utilizando la misma tensión varíe la frecuencia y trate de encontrar hasta 5 armónicos. *Recuerde anotar la frecuencia que corresponde a cada uno de los armónicos.* Para obtener el valor de la tensión ejercida por la masa vuelva a la pantalla inicial y posteriormente al icono **Medidor digital**. En el display se muestra la tensión con el nombre Fuerza (N).

- Sin cambiar de cuerda, en el modo fundamental, o en el segundo armónico; mantenga constante la longitud L y mida la frecuencia para cinco valores distintos de tensión T. *Nota*: Para realizar la variación de masa detenga siempre la oscilación, esto se realiza en la pantalla principal icono **Salida** oprimir F1. Posteriormente, encienda el oscilador con F1 (ON), varíe la frecuencia hasta obtener el armónico elegido y vuelva al icono **Medidor digital** para obtener el valor de la tensión. *Recuerde anotar la frecuencia que corresponde a cada tensión.*

- Sin cambiar de cuerda, en el modo fundamental, o en el segundo armónico, mantenga constate la tensión y mida la frecuencia para cinco valores distintos de la longitud.

- Elabore en cada numeral las tablas de datos apropiadas.

3.8 Análisis

1. Con los datos del item 3 del procedimiento:

   - Construya una gráfica de frecuencia f en función del número de armónicos n. ¿Qué clase de curva obtiene? ¿Cómo varía la frecuencia en función de los armónicos?.
   - Si la gráfica en el numeral anterior es una línea recta, haga el análisis correspondiente para obtener el valor de la densidad de masa μ (Valor experimental) con su correspondiente incertidumbre.
   - La densidad de la cuerda calculada a partir de su masa y longitud es de 3.7×10^{-3}kg/m . La masa se midió con una incertidumbre de $\pm 0,001$ g. y la longitud con $\pm 0,1 cm$. Calcule la incertidumbre de la densidad mediante la expresión:

     $$\mu = \frac{m}{\ell_T},$$

     donde m, es la masa de la cuerda y ℓ_T, la longitud total de la cuerda.

   - Considere este valor como teórico y compare en términos de porcentaje el valor de μ obtenido en el paso anterior.

2. Con los datos de tensión y frecuencia:

   - Construya un gráfico de frecuencia en función de la raiz cuadrada de la tensión. ¿Es su gráfica una línea recta?.

- A partir de su gráfico obtenga la ecuación que relaciona la frecuencia con la tensión y de esta ecuación obtenga un nuevo valor para μ con su respectiva incertidumbre. Compare este valor con el teórico.

3. Con los datos de longitud y frecuencia:

    - Construya un gráfico de frecuencia f en función de $\frac{1}{L}$. ¿Es el gráfico una línea recta? ¿Por qué?
    - A partir de su gráfico obtenga la ecuación que relaciona la frecuencia con la longitud de la cuerda y de esta ecuación obtenga un nuevo valor para μ con su respectiva incertidumbre. Compare este valor con el teórico.

4. De los resultados obtenidos, diga cuál de los valores de μ es el más cercano al valor real. De una justificación a su resultado.