

Laboratorio 4

El Circuito RLC Serie

4.1 Objetivos

1. Estudiar las características de un circuito RLC serie de corriente alterna.
2. Medir los voltajes eficaces en cada uno de los elementos del circuito y la corriente eficaz en éste.
3. Determinar la impedancia total y las reactancias inductivas, capacitivas en el circuito y compararlas con los valores teóricos.
4. Calcular el ángulo de desfase entre el voltaje y la corriente para circuitos RL, RC, RLC y compararlos con los valores teóricos.

4.2 Preinforme

1. ¿ Qué es un circuito de corriente alterna?.
2. ¿ Qué es un voltaje eficaz V_{rms} ó V_{ef} y una corriente eficaz I_{rms} ó I_{ef} ?.
3. ¿ A qué se denomina impedancia de un circuito RLC?.
4. ¿ Qué es un fasor y cómo se representa gráficamente?.

4.3 Fundamento Teórico

Cuando se estudia el oscilador armónico forzado mecánico, se encuentra que la ecuación diferencial que gobierna éste movimiento está dada por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = \frac{F_0}{m}\text{Sen}(wt) \quad (4.1)$$

donde

$$2\beta = \frac{b}{m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

y w es la frecuencia externa de la fuerza impulsora.

La solución general de esta ecuación, da el desplazamiento con respecto al tiempo del oscilador, la cual como se sabe es:

$$X(t) = e^{-\beta t}[c_1 e^{iw_1 t} + c_2 e^{-iw_1 t}] + \left[\frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 + w^2)^2 + 4\beta^2 w^2} \right] \text{Sen}(wt - \phi) \quad (4.2)$$

Físicamente, el primer término de la ecuación representa los efectos transitorios y determina el comportamiento del sistema en los instantes iniciales, desapareciendo rápidamente con el tiempo. El segundo término representa los efectos estacionarios ó de régimen de estado estable.

Llamando:

$$\left[\frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 + w^2)^2 + 4\beta^2 w^2} \right] = A$$

para

$t \gg \frac{1}{\beta}$ (para tiempos muy grandes)

$$X(t) = A(t) \text{Sen}(wt - \phi) \quad (4.3)$$

A y ϕ no son aquí constantes arbitrarias sino valores que dependen de la frecuencia w y de la fuerza impulsora externa que es oscilatoria.

Para esta experiencia se tratará el análogo eléctrico del oscilador armónico mecánico forzado el cual corresponde a un circuito RLC serie A.C. Ver figura (4.1)

Al utilizar la segunda ley de Kirchhoff sobre los voltajes:

$$V_0 \text{Sen}(wt) - IR - L \frac{dI}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

$$V_0 \text{Sen}(wt) = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} \quad (4.4)$$

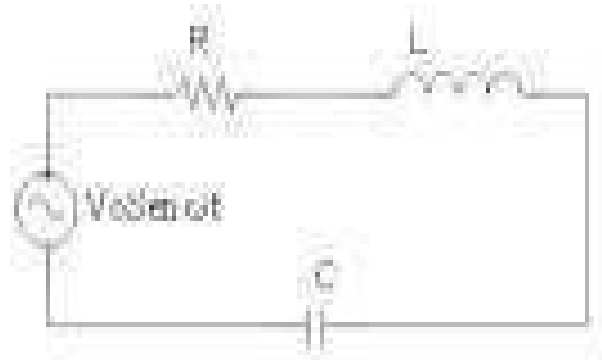


Figura 4.1: Circuito RLC en serie A.C..

como $I = \frac{dq}{dt}$

$$V_0 \text{Sen}(\omega t) = R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2q}{dt^2} + q \frac{1}{C}$$

La cual usualmente se escribe en la forma:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{V_0}{L} \text{Sen}(\omega t) \quad (4.5)$$

con

$$2\beta = \frac{R}{L}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

En este tipo de circuitos generalmente interesa la solución estacionaria, la cual en términos de la carga viene dada por:

$$q(t) = Q \text{Sen}(\omega t - \phi) \quad (4.6)$$

donde

$$Q = \frac{\frac{V_0}{L}}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Para conocer la corriente en estado estacionario:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\frac{\omega V_0}{L}}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2]^{\frac{1}{2}}} \text{Cos}(\omega t - \phi) \quad (4.7)$$

$$I = I_0(t) \text{Cos}(\omega t - \phi)$$

En la práctica interesa conocer la corriente y los voltajes en el circuito, más que las variaciones de carga en el condensador. Para tal fin la ecuación (4.4) se deriva con el tiempo y se escribe en la forma:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + I \frac{1}{C} = iwV_0 e^{iwt} \quad (4.8)$$

Donde se ha utilizado la notación compleja para V :

$$\mathbf{V} = V_0 e^{iwt}$$

al resolver, se toma la parte imaginaria:

$$\text{Im}(\mathbf{V}) = V_0 \text{Sen}(wt) = V$$

Como la ecuación (4.8) aparece también en términos de i , su solución debe ser compleja ($I \rightarrow \mathbf{I}$). Se propone para la parte estacionaria la solución:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}(t) = I_0 e^{iwt} \quad (4.9)$$

Al derivar y hacer uso de la Ley de Ohm en forma compleja $\mathbf{V} = \mathbf{I}\mathbf{Z}$, se tiene:

$$I_0 = \frac{V_0}{|\mathbf{Z}|} \quad (4.10)$$

con

$$\mathbf{Z} = R + i\left(wL - \frac{1}{wC}\right); \quad \text{Impedancia Compleja} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{Z}^* = R - i\left(wL - \frac{1}{wC}\right) \quad \text{Impedancia Compleja Conjugada} \quad (4.12)$$

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*} = \sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2} \quad \text{Módulo Impedancia.} \quad (4.13)$$

Así,

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| e^{i\phi} \quad (4.14)$$

Se acostumbra a llamar:

$$X_L = wL \quad \text{Reactancia Inductiva} \quad (4.15)$$

$$X_C = \frac{1}{wC} \quad \text{Reactancia Capacitiva} \quad (4.16)$$

Usando $X = X_L - X_C$ escribimos

$$\mathbf{Z} = R + iX \quad (4.17)$$

y

$$\text{Tan } \phi = \frac{wL - \frac{1}{wC}}{R} \quad (4.18)$$

De la ecuación (4.11) multiplicando por el módulo de la corriente I , definiendo $V_L = wLI$ y $V_C = I/wC$, al hallar la norma obtenemos:

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} \quad (4.19)$$

Dividiendo por $\sqrt{2}$ ¹:

$$V_{ef} = \sqrt{V_{R_{ef}}^2 + (V_{L_{ef}} - V_{C_{ef}})^2} \quad (4.20)$$

Multiplicando la ecuación (4.18) por I y dividiendo por $\sqrt{2}$:

$$\text{Tan } \phi = \frac{V_{L_{ef}} - V_{C_{ef}}}{V_{R_{ef}}} \quad (4.21)$$

Finalmente:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{V_0 e^{iwt}}{|\mathbf{Z}| e^{i\phi}} = \frac{V_0}{|\mathbf{Z}|} e^{i(wt-\phi)} = I_0 e^{i(wt-\phi)}$$

Así,

$$\mathbf{V} = V_0 e^{i(wt)} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{I} = I_0 e^{i(wt-\phi)} \quad (4.23)$$

$$|\mathbf{Z}| = \frac{V_{ef}}{I_{ef}}. \quad (4.24)$$

Siendo ϕ el ángulo de desfase entre \mathbf{V} e \mathbf{I} , \mathbf{Z} es la impedancia del circuito. Tomando la parte imaginaria para \mathbf{V} e \mathbf{I} obtenemos:

$$V = V_0 \text{Sen}wt \quad (4.25)$$

¹**Nota:** Como se sabe, los medidores de voltaje y corriente utilizados miden los llamados valores eficaces ó valores r.m.s:

$V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$ donde V_0 : Amplitud del voltaje.

$I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ donde I_0 : Amplitud del corriente.

$$\text{Im}(\mathbf{I}) = I_0 \text{Sen}(wt - \phi) = I \quad (4.26)$$

Las ecuaciones (4.19), (4.13), (4.24), (4.18), (4.15) y (4.16) se simplifican si eliminamos el condensador o la inductancia, tal como se muestra en la siguiente tabla comparativa.

CIRCUITO SERIE RL	CIRCUITO SERIE RC
$V_{ef} = \sqrt{V_{R_{ef}}^2 + V_{L_{ef}}^2}$	$V_{ef} = \sqrt{V_{R_{ef}}^2 + V_{C_{ef}}^2}$
$Z = \sqrt{R^2 + (wL)^2} = \frac{V_{ef}}{I_{ef}}$	$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{wC}\right)^2} = \frac{V_{ef}}{I_{ef}}$
$\phi = \text{Tan}^{-1} \left[\frac{wL}{R} \right] = \text{Tan}^{-1} \left[\frac{V_L}{V_R} \right]$	$\phi = \text{Tan}^{-1} \left[\frac{-1}{\frac{wC}{R}} \right] = \text{Tan}^{-1} \left[\frac{-V_C}{V_R} \right]$
$X_L = wL = \frac{V_{L_{ef}}}{I_{ef}}$	$X_C = \frac{1}{wC} = \frac{V_{C_{ef}}}{I_{ef}}$

4.4 Materiales

- Transformador de relación 110/7 V AC.
- Cables.
- Condensadores: de 5.7 μF .
- Inductancias: 9 mH.
- Reóstato: 330 Ω Variable.
- Medidores de voltaje y corriente AC.

4.5 Precauciones

- Familiarizarse con el equipo.
- No utilizar voltajes superiores a los indicados.

- Descargar los condensadores después de utilizarlos.

4.6 Procedimiento

A. CIRCUITO SERIE RL

1. Monte el circuito RL con $V_{ef} = 7 V$ para la fuente con $R = 330 \Omega$ y $L = 9 mH$.
2. Mida V_{ef} , I_{ef} , $V_{R_{ef}}$, $V_{L_{ef}}$.

B. CIRCUITO SERIE RC

1. Monte el circuito RC con $V_{ef} = 7 V$ para la fuente con $R = 330 \Omega$ y $C = 5,7 \mu F$.
2. Mida V_{ef} , I_{ef} , $V_{R_{ef}}$, $V_{C_{ef}}$.

C. CIRCUITO SERIE RLC

1. Monte el circuito RLC con $V_{ef} = 7 V$ para la fuente con $R = 330 \Omega$, $L = 9 mH$ y $C = 5,7 \mu F$.
2. Mida V_{ef} , I_{ef} , $V_{R_{ef}}$, $V_{L_{ef}}$, $V_{C_{ef}}$.

4.7 Análisis

Para cada parte A, B, C:

1. Calcule Z y ϕ con los valores de R , L y C teóricos. Compárelos con los valores obtenidos a través de las ecuaciones (4.24) y (4.21). Tenga en cuenta las incertidumbres.
2. Determine X_L , X_C y compárelas con los valores teóricos.
3. Haga un diagrama fasorial de voltaje, corriente e impedancia mostrando el ángulo de desfase para las partes B y C e indique si el voltaje está atrasado o adelantado respecto a la corriente.

4.8 Preguntas

1. ¿ De los resultados obtenidos en la práctica podemos concluir que los voltajes eficaces se suman linealmente? ¿Porqué?.
2. ¿ De los resultados obtenidos en la práctica podemos concluir que los voltajes instantáneos se suman linealmente?. ¿Porqué?