Laboratorio 3

Superposición de M. A. S.

3.1 Objetivos

1. Medir el período y determinar la frecuencia de oscilación de movimientos armónicos simples (M.A.S.) mediante el osciloscopio.

2. Medir las amplitudes y el período de dos oscilaciones armónicas idénticas, cuando están superpuestas en fase y en contrafase.

3. Determinar el ángulo de desfase de dos oscilaciones armónicas de igual frecuencia por medición directa en el osciloscopio y utilizando las figuras de Lissajous.

4. Medir el ángulo de desfase entre dos oscilaciones armónicas perpendiculares de diferente frecuencia mediante figuras de Lissajous.

5. Analizar y determinar las caracteristicas de pulsaciones generadas y sus períodos.

3.2 Preinforme

1. Consulte cómo se forman las llamadas figuras de Lissajous.

2. ¿ Qué es una señal oscilatoria modulada en amplitud (Señales A.M.)?. ¿ Qué se requiere para producirla?.

3. ¿ Qué es una señal oscilatoria modulada en frecuencia (Señales F.M.)?. ¿ Para qué sirve?.

4. Complete los pasos necesarios para determinar la ecuación (3.2).

5. Complete los pasos necesarios para determinar la ecuación (3.3).

3.3 Fundamento Teórico

A. Superposición de dos Movimientos Armónicos Simples: Igual dirección y frecuencia

La superposición ó interferencia de dos M.A.S. producen un desplazamiento de la señal a la largo de la misma línea.

Sea x_1 y x_2 el desplazamiento producido por cada M.A.S.:

$$x_1 = A_1 Sen(wt + \alpha_1)$$
$$x_2 = A_2 Sen(wt + \alpha_2)$$

Al superponer estos dos movimientos:

$$x = x_1 + x_2$$

se encuentra:

$$x = ASen(wt + \alpha) \tag{3.1}$$

Donde

$A \ = \ Amplitud$
$wt \ + \ \alpha \ = \ Fase$

El movimiento resultante es un M.A.S. de la misma frecuencia, diferente amplitud y diferente fase inicial.

Con un poco de algebra se obtiene la nueva amplitud y el ángulo:

$$A = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2Cos(\delta)]^{\frac{1}{2}}$$

con $\delta = \alpha_2 - \alpha_1$
Entonces

$$\tan(\alpha) = \frac{A_1Sen(\alpha_1) + A_2Sen(\alpha_2)}{A_1Cos(\alpha_1) + A_2Cos(\alpha_2)} \tag{3.2}$$

CASOS

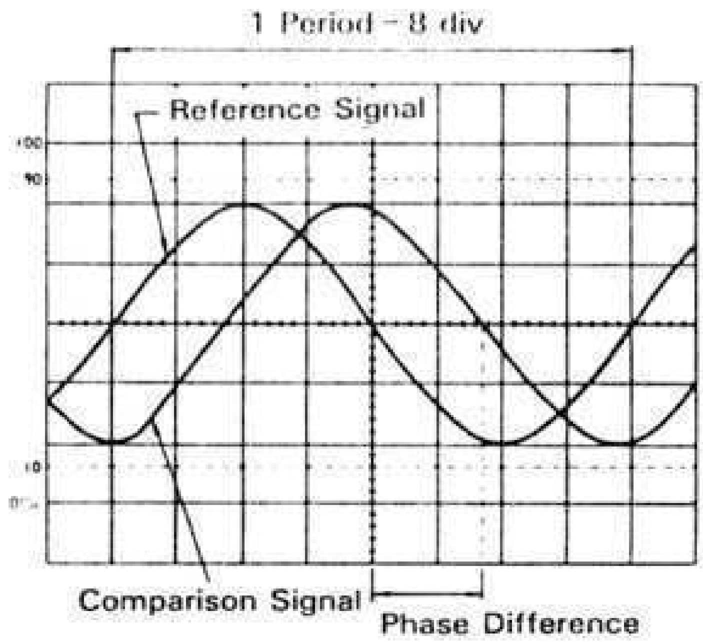

Figura 3.1: Diferencia de fase entre dos señales sinusoidales.

1. Si $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = 0$ entonces A_1 y A_2 están en FASE y $A = A_1 + A_2$; a este tipo de interferencia se denomina **constructiva**. Y si $A_1 = A_2$ entonces $A = 2A_1$ de doble amplitud; a este tipo de interferencia se denomina **completamente constructiva**.

2. Si $\delta = \alpha_2 - \alpha_1 = \pi$ entonces A_1 y A_2 están en CONTRAFASE resultando $A = A_1 - A_2$; a este tipo de interferencia se le llama **destructiva**.
   Y si $A_1 = A_2$ entonces $A = 0$; a este tipo de interferencia se le llama **completamente destructiva**.

En la práctica se utiliza un osciloscopio de doble canal, el cual consta de dos entradas CH_1 y CH_2. La medida de desfase es inmediata ya que basta con entrar una señal por cada canal y medir la diferencia de fase sobre la pantalla del osciloscopio como lo indica la figura (3.1).

B. Superposición de dos Movimientos Armónicos Simples Perpendiculares entre sí con igual y diferente frecuencia.

Sea

$$x = ASen(wt + \alpha_1)$$
$$y = BSen(wt + \alpha_2)$$

La diferencia de fase entre x e y es $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 =$ con lo cual se puede escribir y como:

$$y = BSen[(wt + \alpha_1) - \delta]$$

Al desarrollar y hacer los pasos correspondientes, se encuentra la ecuación general de la trayectoria:

$$B^2x^2 + A^2y^2 - 2ABxyCos(\delta) = A^2B^2Sen^2(\delta) \tag{3.3}$$

CASOS

Si $\delta = 0$, x e y se encuentran en fase:

$$y = \frac{B}{A}\,x \tag{3.4}$$

Es la ecuación de una línea recta, con pendiente positiva.

Si $\delta = \pi$:

$$y = -\frac{B}{A}\,x \tag{3.5}$$

Es la ecuación de un línea recta, con pendiente negativa

De la interferencia de los dos M.A.S. de la misma frecuencia se obtiene en el plano una línea recta cuya pendiente depende si $\delta = 0$ ó $\delta = \pi$.

Si $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ resulta:

$$\frac{(x)^2}{A^2} + \frac{(y)^2}{B^2} = 1 \tag{3.6}$$

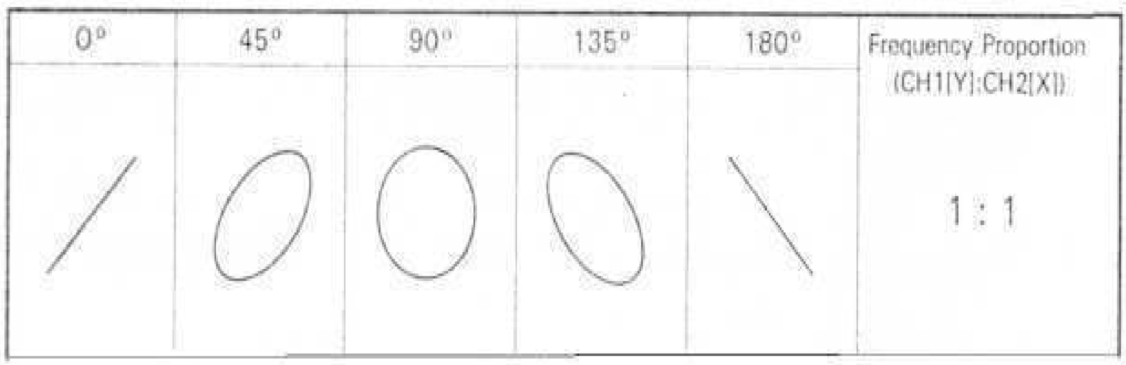

Figura 3.2: Superposición de dos M.A.S. para diferentes desfases.

Se obtiene en el plano una elipse con los ejes de ella paralelos a las direcciones de los dos movimientos.
Si $A = B$, la elipse se transforma en una circunferencia.
Para otros valores de $\delta \neq \frac{\pi}{2}$ la trayectoria es todavía una **elipse**, pero sus ejes están rotados respecto a los ejes cordenados. Esta trayectoria cerrada es una **figura de Lissajous**. Por lo tanto la ecuación (3.3) es la forma general de la elipse.

Para hacer la composición de M.A.S. en dirección perpendicular e igual frecuencia, se suprime el barrido horizontal llevando una señal de frecuencia f_1 al canal CH_2 y una señal de frecuencia f_2 al canal CH_1. La figura resultante es independiente del tiempo y será una línea recta (Ecuaciones (3.4) y (3.5)), una elipse (Ecuación (3.6)) ó una circunferencia, según sea el desfase entre las dos señales introducidas.

Si se trazan dos tangentes una horizontal (T_2) a la anterior figura y otra vertical (T_1) se observa que sólo hay un corte:

$\frac{f_1}{f_2} = \frac{T_2}{T_1} = 1$ entonces $f_1 = f_2$

y las señales anteriores tienen la misma frecuencia, como se esperaba.

Así, cuando el ángulo de desfase es cero es una línea recta. Al aumentar el desfase, se convierte la figura en una elipse estrecha, hasta que en $\delta = \frac{\pi}{2}$ es una circunferencia. Cuando δ aumenta la elipse se inclina sentido opuesto hasta llegar a ser recta de pendiente negativa en $\delta = \pi$.(Ver figura (3.2))

Esta técnica se puede extender para determinar frecuencias diferentes y que sean racionales. Se toma una señal de frecuencia conocida f_1 en CH1 y la otra desconocida f_2 en CH2; la figura obtenida al independizar las señales del tiempo

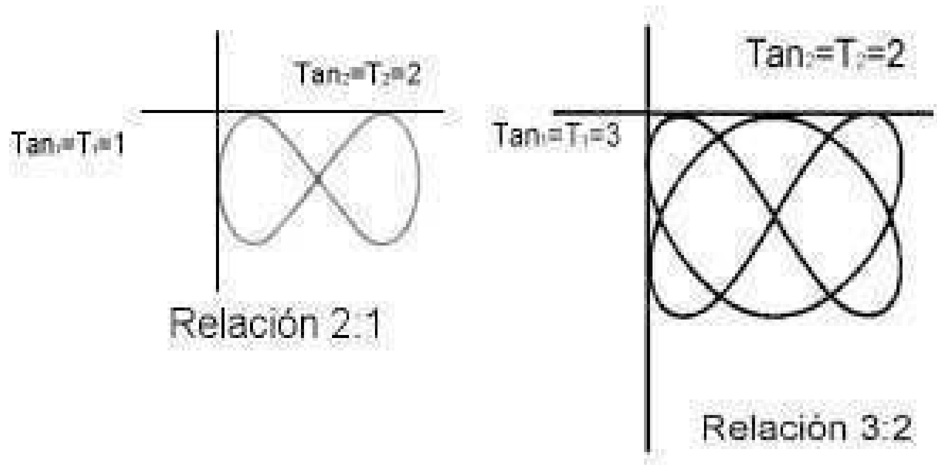

Figura 3.3: Superposición de dos M.A.S. con diferentes frecuencias.

(figura (3.3)) es una figura completamente cerrada llamada figura de Lissajous en las cuales se trazan las tangentes T_1 y T_2, contando los puntos de contacto:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{2\pi f_1}{2\pi f_2} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{Tan_2}{Tan_1} = \frac{T_2}{T_1} \tag{3.7}$$

Cuando $w_1 = 1$ y $w_2 = 2$ en la figura la tangente horizontal Tan_2 tocará la figura en dos puntos y una tangente vertical Tan_1 en un punto, la relación será 2:1; como lo muestra la figura (3.3).

C. Superposición de dos Movimientos Armónicos Simples. Igual dirección y diferente frecuencia: "BEATS" ó Pulsaciones

Sea:

$$x_1 = A\text{sen}\,(w_1 t)$$

$$x_2 = A\text{sen}\,(w_2 t)$$

entonces:

$$x = x_1 + x_2 = A(Senw_1 t + Senw_2 t)$$

efectuando unos pasos algebraicos finalmente el movimiento resultante x tiene la forma:

$$x = 2A * Cos\frac{1}{2}(w_1 - w_2)t * Sen\frac{1}{2}(w_1 + w_2)t \tag{3.8}$$

con los siguientes cambios:

$W_{med} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ es la frecuencia de las oscilaciones resultantes.

$W_{mod} = \frac{1}{2}(w_1 - w_2)$ es la frecuencia modulada o frecuencia de la pulsación.

$A_{mod} = 2ACos(w_{mod}t)$ es la llamada Amplitud Modulada.

la oscilacion resultante es (Figura 3.4):

$$x = A_{mod}Sen\frac{1}{2}[(w_1 + w_2)t] \tag{3.9}$$

3.4 Materiales

- Dos Generadores de onda.
- Osciloscopio de doble canal (Marca HUNG CHANG, MODELO 65202).
- Cables.

3.5 Precauciones

- Familiarizarse con el equipo.
- Cerciórese de tener las dos perillas (Cal) girados completamente a la derecha en el osciloscopio.
- Tenga en cuenta que las escalas de frecuencia utilizadas están en el rango entre 1 kHz a 10 kHz.

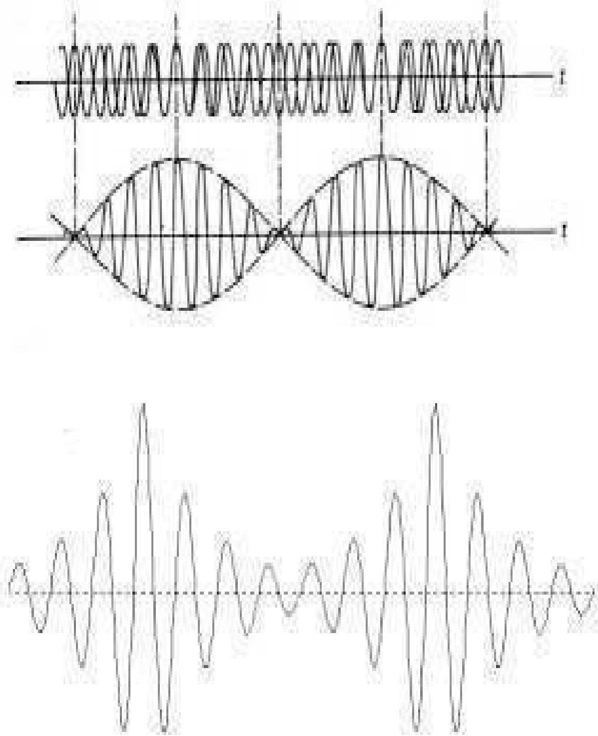

Figura 3.4: Pulsaciones producidas por la superposición de dos ondas de frecuencias muy cercanas

3.6 Procedimiento

A. Superposición de dos Movimientos Armónicos Simples: Igual dirección y frecuencia

1. Conecte a la red de 110 V A.C. el osciloscopio y uno de los generadores de onda.

2. Utilice en el generador la perilla de onda SENO. No utilice la atenuación e introduzca la señal en el canal 1 (CH1) de frecuencia entre 1 y 10 kHz.

3. Ajuste los controles del osciloscopio para observar la traza de la señal. Gire completamente hacia la derecha las perillas (CAL).

4. Tome el período y la amplitud de la señal. Mueva las perillas VOLTS/DIV y TIME/DIV de modo que tenga una onda fácil de ver el tamaño. Ajuste la perilla TRIGGER LEVEL si es necesario.

5. Haga la relación $f = \frac{1}{T}$ y compárela con la lectura del generador (Trate esto en el análisis). Repita lo anterior para otras dos frecuencias y consignelos en una tabla.

6. Coloque en paralelo[1] otra sonda y lleve la señal al canal 2 ($CH2$) entrada. Mida el período y su amplitud.

7. Coloque la perilla (ADD) del osciloscopio: La señal que aparece es la superposición de los dos canales. Tome su amplitud y período. Repita lo anterior para otras dos señales de diferente frecuencia.

8. Presione la tecla INV la cual inverte la señal del canal 2 ($CH2$). Active la perilla ADD del osciloscopio y analice el resultado observado.

9. Conecte otro generador a la red de 110 V A.C. y utilice el modo de onda SENO, sin atenuación.

10. Introduzca las señales de los generadores por separado a las entradas $CH1$ y $CH2$ del osciloscopio.

11. Manipule los controles del osciloscopio para traer las ondas al centro de la pantalla; para ello presione las teclas de $CH1$ y $CH2$ simultáneamente. Haga los ajustes necesarios para que las dos señales tengan amplitudes iguales. Deje las perillas de los generadores iguales[2]. Verifique que las frecuencias sean aproximadamente iguales.

---

[1] Con el fin de que la misma señal entre a ambos canales.

[2] Para obtener una buena señal, deje fija una de las señales y varíe finamente el control del otro generador

12. Mida la distancia horizontal entre los puntos correspondientes a las dos señales y determine el desfase. Ver figura (3.1). Si no observa desfase presione la tecla INV.

B. Superposición de M.A.S. Perpendiculares entre Sí.

Figuras de Lissajous.

1. En el arreglo anterior active el modo X-Y del osciloscopio. Con ello se tienen dos oscilaciones perpendiculares entre sí una a lo largo del eje X y otra a lo largo del eje Y, independientes del tiempo.Utilice la escala de $1kHz$ y fije la señal en uno de los generadores en un valor menor de 2000 Hz. Varíe la otra señal y obtenga las figuras correspondientes a las de figura (3.3). Busque en el osciloscopio la figura que corresponde a la relación 1:1, 2:1, 3:1. Anote para el análisis f_1, f_2, T_1, T_2.

2. Para obtener la figura que corresponde a la relación 1:2; 1:3, qué se debe hacer?. Experimente.

3. Obtenga las relaciones 2:3, 3:2, 3:4 y 4:3.

C. BEATS ó Pulsaciones. Superposición de M.A.S. Igual dirección y frecuencias levemente diferentes.

1. En el arreglo anterior desactive el modo X-Y del osciloscopio e introduzca las señales de cada generador en las entradas del canal 1 (CH1) y canal 2 (CH2) y varíe las frecuencias de cada generador, hasta que en el modo de **ADD** se observe la pulsación o beet[3]. Utilice el **TRIGGER** para fijarla. Mueva las perillas de los canales, para medir los períodos y las frecuencias de cada oscilación f_1 y f_2. Regrese al modo de **ADD** y determine el período y frecuencia de la oscilación modulada y de la oscilacion rápida. Repita para otros dos valores. Tome datos.

3.7 Análisis

1. Analice los puntos 5, 7, 11, 12 de la parte A y compere los resultados con los valores esperados. Haga diagramas donde sea necesario.

2. Analice la tabla de resultados obtenida en la parte B y lo diagramas de las figuras correspondientes. Compare con los valos esperados.

[3] Para obtener una buena señal, deje fija una de las señales y varíe finamente el control del otro generador

3. Tome los datos obtenidos en la parte C y compárelos con los valores esperados que vienen dados por:

$$\begin{aligned} \omega_{rapida} &= \frac{1}{2}(2\pi f_1 + 2\pi f_2) \\ \omega_{modulada} &= \frac{1}{2}(2\pi f_1 - 2\pi f_2). \end{aligned}$$

Tenga en cuenta las incertidumbres.

3.8 Preguntas

1. En la parte A la diferencia de fase fue 0 y π. Considere un desfase de $\frac{\pi}{2}$. Analice el movimiento resultante si el desfase es diferente a los ya considerados. ¿ Qué tipo de movimiento resultará?.