EXPERIMENTO 5

FUNCIONES NO LINEALES

APLICACIÓN EXPERIMENTAL PENDULO SIMPLE

ANÁLISIS GRÁFICO

NOTA: ESTÉ EXPERIMENTO SE DESARROLLA DURANTE DOS SESIONES DE CLASE, A TRAVES DE LAS CUALES CADA PROFESOR EXPLICA (NO OPCIONAL) ASPECTOS TEÓRICO-PRÁCTICOS DEL TEMA, APOYADO EN SUS EXPERIENCIAS Y DEBE ACMPAÑAR A LOS ESTUDIANTES A TRAVÉS DEL EXPERIMENTO COMPLETO DE FUNCIONES NO LINEALES CON LOS EJERCICIOS PROPUESTOS AL FINAL.

Se recomienda enfáticamente realizar lectura preliminar cuidadosa del material de laboratorio antes de ejecutar la práctica experimental.

1 OBJETIVOS

- Medir magnitudes físicas experimentales en una práctica de laboratorio, organizar la información en tablas, aplicar la técnica de análisis grafico para funciones no lineales y hallar la relación entre las variables.
- Identificar y proponer los cambios de variable necesarios para volver lineal la nueva grafica en papel milimetrado, o igualmente a que potencia se debe elevar la variable independiente para generar la recta que permite determinar la relación no lineal entre dichas variables.
- Determinar la constante de proporcionalidad sobre la grafica donde se ha comprobado exitosamente la hipótesis y construir la ecuación que relaciona las variables experimentales.
- Aplicar el método de los mínimos cuadrados (**regresión no lineal**), para el ajuste de un conjunto de puntos de una grafica no lineal.
- Calcular las constantes que dan lugar a la función no lineal.
- Construir la ecuación general pertinente que modela matemáticamente el experimento estudiado y con el empleo de la hermenéutica establecer su significado con lo propuesto en textos de física.

2 INTRODUCCIÓN

"El experimentador es el que se encuentra en primera línea, el que realiza los experimentos y mediciones sucesivos. El experimento significa el planteamiento del problema, dirigido a la naturaleza, la medición significa la recepción de la respuesta que dio la naturaleza. Pero antes de ejecutar el experimento, se necesita reflexionar sobre éste, lo que significa la necesidad de formular la pregunta dirigida a la naturaleza, antes de valorar la medición, se necesita interpretarla, o sea, hay que comprender la respuesta de la naturaleza. De éstas dos tareas se ocupa el teórico"

Palabras del Ph. D. Max Kart Ernst Ludwig Planck (1852-1947). Mundialmente reconocido en la comunidad académica como Max Planck Padre la Física Moderna y progenitor de la cuantización de la energía.

Los laboratorios de Ciencias son razonablemente, las salas de mayor importancia en las instituciones educativas, incluso considerándole comparativamente con las hoy equivocadamente llamadas salas inteligentes, por cuanto en ellos se entrelaza dando cuerpo y estructura de unidad a la práctica experimental con la teoría; además permite al educando descubrir, redescubrir conocimientos, involucrarse en experiencias e iniciativas, con el objeto de contextualizar, interpretar, construir y aplicar que lo aprendido tuvo correcta asociación a través de la hermenéutica. En los laboratorios durante el trabajo experimental, se debe prestar especial interés inicialmente en la actividad recolectora de valores y cantidades experimentales, que provienen de medidas realizadas sobre variables, físicas, naturales, biofísicas, industriales u otras; en virtud, que el éxito pedagógico de ésta fundamental tarea, depende en gran medida de la toma, tabulación, organización y análisis grafico, con los correspondientes cambios de variable sobre los datos y su posterior tratamiento.

2.1 ANÁLISIS GRAFICO DE FUNCIÓNES NO LINEALES

El estudio de graficas elaboradas a partir de datos experimentales que no reproducen rectas pero si curvas familiares posibles de convertir en lineales, serán tratadas por medio de análisis grafico con el empleo de la técnica de cambio de variable.

Su atención se justifica porque un número considerable de principios, fenómenos y leyes físicas presentes durante el desarrollo de los contenidos programáticos académicos de Ciencias Básicas y Naturales en las instituciones educativas; se expresan a través de funciones del tipo $\mathrm{Vd} = Cte(\mathrm{Vi})^{\mathrm{n}}$. En lo sucesivo se reemplazará la notación Cte por la letra "a" y la expresión algebraica adoptada por comodidad es:

$$\mathrm{Vd} = a\,(\mathrm{Vi})^{\mathrm{n}} \qquad (1)$$

Que tiene la misma forma o estructura de la conocida ecuación algebraica $\mathrm{Y}=a\mathrm{X}^{\mathrm{n}}$, enseñada en la Matemática, donde “ a ” y “ n ” son constantes reales positivas o negativas. En la anterior ecuación, Vd y $(\mathrm{Vi})^{\mathrm{n}}$ son cantidades que guardan alguna forma de proporcionalidad y la magnitud de “ a ” se reconoce como constate de proporcionalidad y n es la potencia de una de las variables; sí en la ecuación “ $\mathrm{n}=1$” se encuentra la singularidad de variables directamente proporcionales.

Aquellos casos donde “ $\mathrm{n}=-(valor)$ ”, es decir para “ n ” negativo se define éstas, como variables inversamente proporcionales y por similitud de la ecuación (1), la notación respectiva tiene la forma $\mathrm{Vd}=a(\mathrm{Vi})^{-\mathrm{n}}$. Su forma equivalente es $\mathrm{Vd}=a\,\dfrac{1}{\mathrm{Vi}^{\mathrm{n}}}$.

Para $\mathrm{n}=\dfrac{D}{d}=p$ ó $\mathrm{n}=p$, con p resultado de evaluar el fraccionario propuesto; se obtiene una constante real, positiva o negativa y genera una función proporcional a la potencia a la cual hay que elevar una de las variables y tienen la siguiente notación $\mathrm{Vd}=a\,(\mathrm{Vi})^{\frac{D}{d}}=a\sqrt[d]{(\mathrm{Vi})^{D}}=a(\mathrm{Vi})^{p}$.

Un caso importante y de alta ocurrencia en Ciencias Naturales tiene la forma $\mathrm{Vd}=a(\mathrm{Vi})^{-2}$ e implica que “la variable Vd es proporcional con el inverso cuadrado de la variable Vi, que usualmente resulta ser la distancia**”**.

2.1.1 FUNCION CUADRATICA

Los dibujos de los lugares geométricos de datos experimentales que *no reproducen líneas rectas*; sugiere una **relación no lineal entre éstas variables**.

Por ejemplo si el exponente de una de las variables estudiadas es $\mathrm{n}=2$, la grafica resultante es una *parábola* y se define una función proporcional con el cuadrado de una de las variables.

La curva obtenida en la figura 1 permite observar el crecimiento de las dos variables pero en diferente proporción, se observa en el primer cuadrante de abajo hacia arriba como la variable dependiente se incrementa más rápidamente que la independiente, sugiriendo una relación parabólica, donde se plantea la **hipótesis de una función cuadrática**.

En consecuencia cuando se grafican datos experimentales que generan una media parábola, es legitimo proponer el siguiente cambio de variable $\mathrm{Vd} \propto (\mathrm{Vi})^{-2}$ para volverlas lineales.

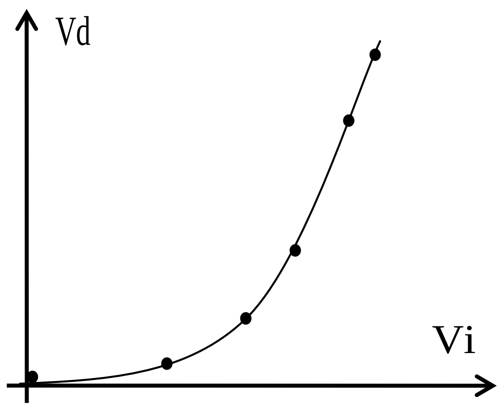

Figura 1 Gráfica de las variables experimentales de una función parabólica.

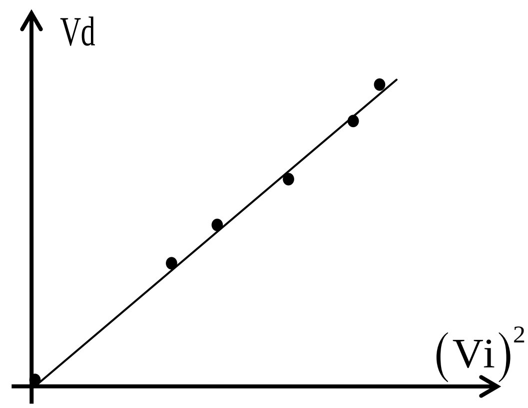

Figura 2 Gráfica de verificación de la hipótesis del cuadrado de la variable independiente.

El cambio de variable propuesto y aplicado en la grafica de la figura 2 ilustra que al elevar al cuadrado la variable independiente, se logra una línea recta entre las variables *confirmando la hipótesis planteada* de la primera observación. El cálculo de la pendiente de ésta recta se corresponde con la constante de proporcionalidad que asocia las variables para generar la función no lineal expresada a continuación.

$$\mathrm{Vd} = a\,\mathrm{Vi}^2 \qquad (2)$$

2.1.2 FUNCION INVERSA

Figuras levantadas con parejas de datos de un experimento de laboratorio, donde el exponente de una de las variables estudiadas resulta ser negativo, usualmente se describen como inversamente proporcionales.

Para $n = -1$ la notación respectiva tiene la forma $\mathrm{Vd} = a(\mathrm{Vi})^{-1}$ y reproduce una *hipérbola equilátera*.

La figura 3 ilustra la curva resultante de datos de alguna fuente experimental, donde se observa como hacia la derecha la variable Vi crece mientras Vd disminuye, lo que permite plantear la **hipótesis** de que la variable dependiente es **proporcional con el inverso de la variable independiente,** así

$$Vd \propto Vi^{-1} \textit{ o igualmente } Vd \propto \frac{1}{Vi}$$

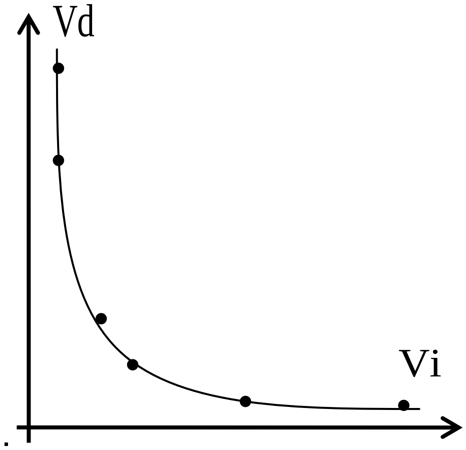

Figura 3 Gráfica de las variables experimentales de una función inversa.

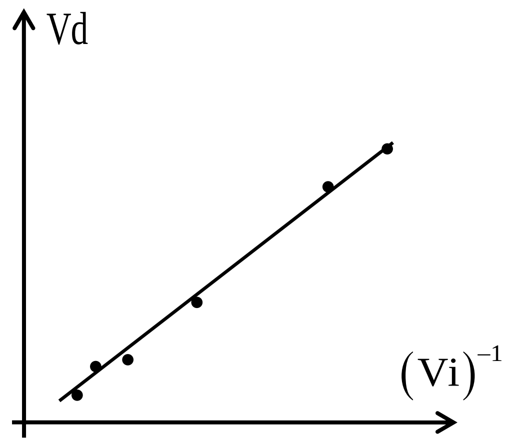

Figura 4 Gráfica de verificación de la hipótesis del inverso de la variable independiente.

La figura 4 representa una razonable línea recta como resultado de graficar el cambio de variable planteado como **hipótesis**, permitiendo convertir en lineal la proporcionalidad entre las variables estudiadas y a partir de dicha recta calcular la constante de proporcionalidad a para generar la función no lineal de interés como se muestra a continuación $Vd = a\,Vi^{-1} = a\,\frac{1}{Vi}$. (3)

2.1.3 FUNCION RAIZ CUADRADA

El tipo de funciones no lineales de la forma $n = \frac{1}{2}$ *ó* $n = 0,5$ se denominan proporcionales a la raíz cuadrada y produce la figura 5 al unir los puntos ubicados en el plano de las variables.

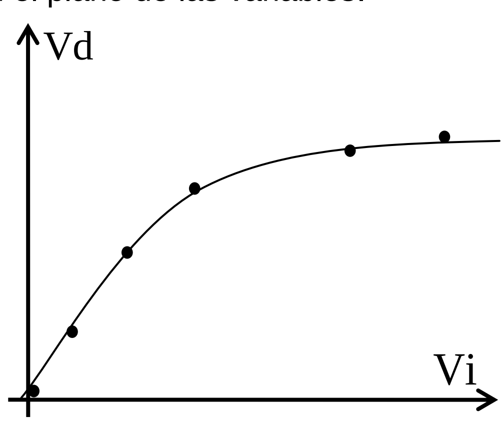

Figura 5 Gráfica de las variables experimentales de una función no lineal.

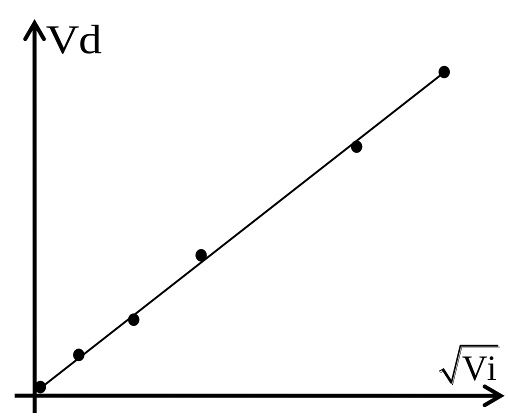

Figura 6 Gráfica de las variables experimentales de una función raíz cuadrada.

La figura 5 muestra el crecimiento de las dos variables pero en diferente proporción, la variable dependiente se incrementa más lentamente que la independiente e ilustra una relación no lineal, que permite plantear la **hipótesis de** una función del tipo raíz cuadrada así $\mathrm{Vd} \propto \mathrm{Vi}^{\frac{1}{2}}$ *o igualmente* $\mathrm{Vd} \propto \sqrt{\mathrm{Vi}}$

Las nuevas variables sugeridas anteriormente y empleadas en la grafica de la figura 6 permiten observar como al extraer la raíz cuadrada a cada uno de los valores de la variable independiente, se logra ahora una razonablemente línea recta entre las variables con lo cual se verifica la hipótesis planteada. El cálculo de la pendiente de ésta recta será la constante de proporcionalidad que permite generar la función no lineal expresada a con la representación

$$\mathrm{Vd} = a\ (\mathrm{Vi})^{\frac{1}{2}} = a\,(\mathrm{Vi})^{0,5} = a\sqrt{(\mathrm{Vi})}\,. \qquad (4)$$

NOTA IMPORTANTE: Aquí no se agota el estudio de las funciones no lineales por análisis gráfico, los casos conocidos en las ciencias son abundantes, sin embargo se recupera un método que permite seguir explorando funciones algebraicas con datos experimentales e incluyendo combinaciones de los tipos estudiados, pues no siempre con un solo cambio de variable es suficiente.

Particularmente en la Física la ecuación algebraica o función no lineal

$$\mathrm{Vd} = a\,(\mathrm{Vi})^{-2} \qquad (5)$$

Es frecuente, e igual sucede en otras Ciencias siendo su interpretación*: "la variable* Vd *es proporcional con el inverso cuadrado de la variable* Vi *"*

2.2 REGRESIONES

Los métodos analíticos denominados **regresión lineal ya estudiado y aplicado en el capitulo anterior al igual que el no lineal** ahora propuesto en este capitulo, para generar funciones no lineales se utiliza en particular para variables que resultan elevadas a una potencia diferente a la unidad, donde el exponente puede ser una constante real, positiva, negativa, entera o fraccionaria y tienen la misma fundamentación de los principios del calculo y la estadística; se diferencian porque la **regresión no lineal** aplica el operador **logaritmo natural "** $\ln$ " sobre cada una de las variables, pero los cálculos y operaciones siguen el mismo procedimiento ya descrito en la regresión lineal. El valor de éste procedimiento se evidencia cuando el experimentador infiere como se reafirman o validan, los resultados obtenidos previamente a través del análisis grafico.

2.2.1 REGRESION NO LINEAL

Una **regresión no lineal** se fundamenta y aplica empleando las propiedades de los logaritmos (éste ejemplo se trabaja con logaritmos naturales por escogencia arbitraria) y facilita la obtención de la función, disminuyendo la posible interpretación subjetiva de los experimentadores y al mismo tiempo afirma la bondad del método grafico sin que sus resultados sean exactamente iguales.

Sea la función $\mathrm{Vd} = k\left(\mathrm{Vi}\right)^{a}$ sobre la que aplicaremos logaritmos naturales y sus propiedades, entonces $\ln\left[\mathrm{Vd} = k\left(\mathrm{Vi}\right)^{a}\right]$

$$\ln \mathrm{Vd} = \ln k + \ln\left(\mathrm{Vi}\right)^{a}$$

$$\ln \mathrm{Vd} = \ln k + a \ln \mathrm{Vi} \qquad (6)$$

No son valores absolutos y se recomienda
trabajar con cuatro decimales, por ser logaritmos

Medida N_o	Vi_i Eje horizontal	Vd_i Eje vertical	$\left[\mathrm{Vi}_i\right] = \ln \mathrm{Vi}_i$	$\left[\mathrm{Vd}_i\right] = \ln \mathrm{Vd}_i$	$\left[\mathrm{Vi}_i\right]^2$	$\left[\mathrm{Vi}_i\right]\bullet\left[\mathrm{Vd}_i\right]$
1						
2						
3						
4						
5						
6						
⋮						
n =			$\Sigma\left[\mathrm{Vi}_i\right] =$	$\Sigma\left[\mathrm{Vd}_i\right] =$	$\Sigma\left[\mathrm{Vi}_i\right]^2 =$	$\Sigma\left[\mathrm{Vi}_i\right]\bullet\left[\mathrm{Vd}_i\right] =$

Tabla 1 Cuadro genérico para procesar datos provenientes de un experimento, que se emplean en una **regresión no lineal**.

El operador " $\ln$ " actúa sobre cada variable para generar los nuevos valores de cálculo y ejecutar las operaciones indicadas en la primera fila, cantidades que permiten totalizar las sumas requeridas de las celdas de la última fila.

Los cálculos de la tabla 1 de datos, son reemplazados en las ecuaciones 7 y 8, para determinar los parámetros de la *regresión no lineal*, no obstante ser idénticas en estructura a las empleadas en la *regresión lineal*, **aquí no se toma el valor de la variable sino el logaritmo natural de la variable**, redefinida como se ve claramente en las columnas 4 y 5 de la tabla precedente:

$\left[\mathrm{Vd}_i\right] = \ln \mathrm{Vd}_i \qquad \left[\mathrm{Vi}_i\right] = \ln \mathrm{Vi}_i$

$$a = \frac{n\Sigma[\mathrm{Vi}_i]\times[\mathrm{Vd}_i] - \Sigma[\mathrm{Vi}_i]\,\Sigma[\mathrm{Vd}_i]}{n\sum[\mathrm{Vi}_i]^2 - \left(\Sigma[\mathrm{Vi}_i]\right)^2} \tag{7}$$

$$b = \frac{\sum[\mathrm{Vd}_i]\sum[\mathrm{Vi}_i]^2 - \sum[\mathrm{Vi}_i]\sum[\mathrm{Vi}_i]\times[\mathrm{Vd}_i]}{n\sum[\mathrm{Vi}_i]^2 - \left(\sum[\mathrm{Vi}_i]\right)^2} \tag{8}$$

El resultado final entonces será la nueva expresión matemática con igual forma de la ecuación 1, de tal manera que posterior al cálculo de los parámetros **aquí definidos** como a *exponente de la variable independiente* y b potencia a la cual se eleva la base de los logaritmos naturales para hallar la *constante de proporcionalidad* k ,debido a que el término independiente de la ecuación 6, $\ln k$ corresponde al parámetro b calculado en la ecuación 8;

$$k = e^b \tag{9}$$

Así la forma definitiva de la nueva ecuación 10 es:

$$\mathrm{Vd} = k\left(\mathrm{Vi}\right)^a \tag{10}$$

Que presenta la misma **función no lineal** expresada en la de la ecuación 1.

3 MATERIALES

Experimento: ***PÉNDULO SIMPLE; estudio de la proporcionalidad entre el periodo* T *y la longitud* L *del péndulo simple*.**

- Soporte universal.
- Cilindro de cobre, aluminio o acero.
- Hilo o cuerdas de diferentes longitudes.
- Calibrador análogo. (Resolución $\frac{1}{20}\mathrm{mm} =$ 0,05 mm) (Tolerancia 0,1%).
- Cronometro Pasco. (Resolución 0,0001 s) (Tolerancia 0,1%).
- Regla graduada en milímetros. (Resolución 1 mm) (Tolerancia 1%).
- Balanza de laboratorio digital. (Resolución 0,001 g) (Tolerancia 0,1%).

4 RECOMENDACIONES

- ✓ La longitud del péndulo se mide desde el punto de suspensión O, hasta el centro del cilindro metálico, figura 7.
- ✓ Para medir el periodo se coloca el cronómetro Pasco en el modo péndulo (Pend) y en la escala 0,1 ms, donde la máxima lectura permitida es 1,999 s.

- ✓ La oscilación del péndulo inicia en el punto A de la figura 7, pero el medidor de tiempo se activa automáticamente cuando el cilindro pasa por el cronometro Pasco en el punto B, e inicia la medida del tiempo empleado durante el recorrido de la primera cuarta parte del periodo desde B hasta C, el período se completa cuando el cronometro se desactiva automáticamente al cruzar por tercera vez el punto B, complementa la información las fotos de la figura 8.
- ✓ Al hacer oscilar el péndulo, evite que éste golpee accidentalmente al sensor del cronómetro e igualmente no permita que el cilindro active el sensor.

5 TRABAJO PARA DESARROLLLAR

Cualquier objeto suspendido por un hilo, no importa su forma o material, que pueda oscilar alrededor de su punto de equilibrio es un péndulo simple.

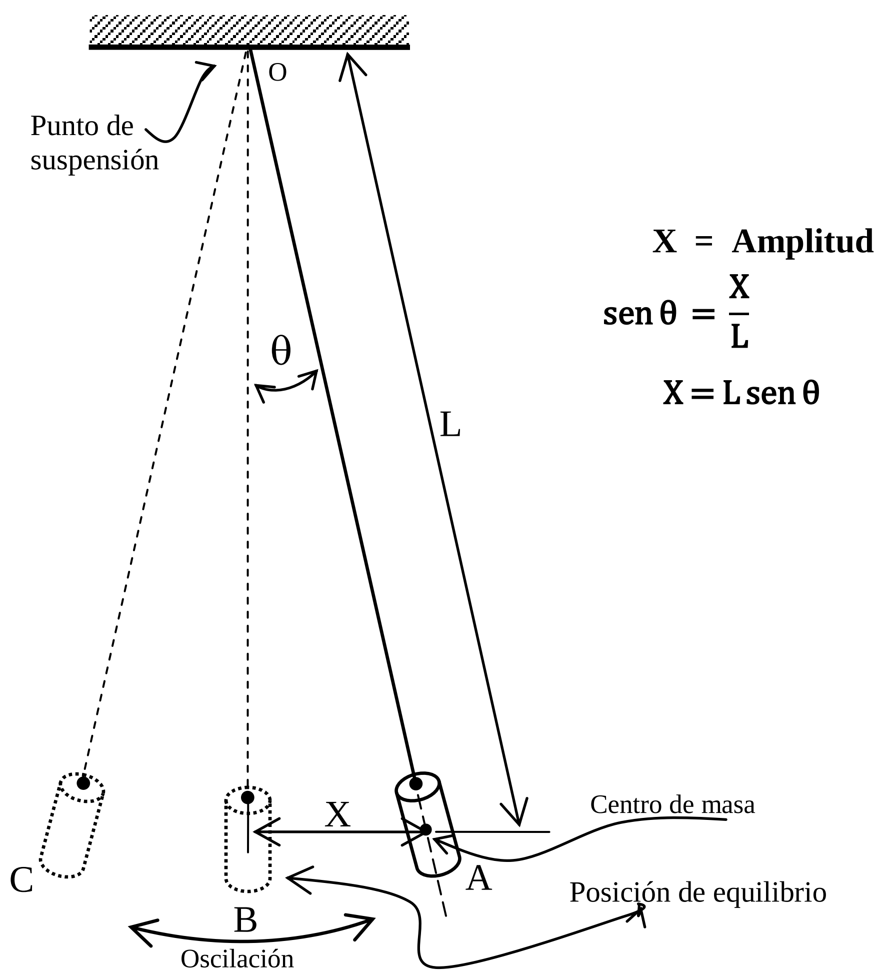

Figura 7 Péndulo simple para el estudio de un movimiento oscilatorio.

La longitud del péndulo **L** la constituye la distancia en (m) desde el punto de suspensión O hasta el centro de masa del objeto que oscila, como se ilustra en la figura 7.

La amplitud de la oscilación **X** se define como el desplazamiento horizontal de la masa con relación al punto de equilibrio o posición intermedia (línea punteada OB) medido en (m) como se observa en figura 7 y fotos figura 8.

El periodo **T** es el tiempo en (s) empleado para realizar una oscilación completa.

El péndulo simple fue uno de los primeros dispositivos para medir el tiempo, utilizado en la antigüedad por los científicos, en particular y a partir de Galileo Galilei, gigante precursor de las ciencias a quien se le atribuye.

- Seleccione un cilindro de masa determinada, átela al extremo de una cuerda de longitud variable y suspéndala de la varilla horizontal del soporte universal (fotos de la figura 8).
- Considere una longitud inicial del péndulo **L** = 0,15 m.

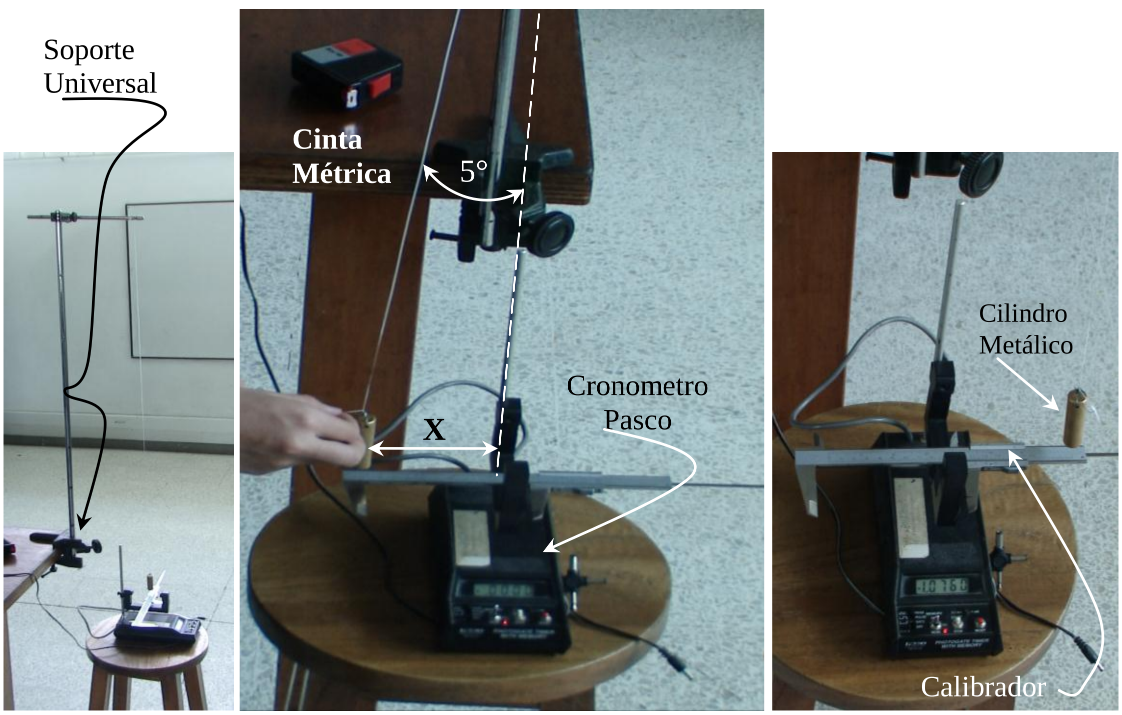

Figura 8 Fotos del péndulo simple con los elementos que requiere el estudio de su movimiento oscilatorio.

- Desplace el cilindro desde su posición de equilibrio o línea punteada OB como se muestra en la figura 7 una amplitud **X,** correspondiente a un ángulo de 5°, *no varíe éstas dos condiciones de trabajo durante el resto del experimento* (masa del cilindro y amplitud, la correspondiente a un ángulo de 5°).

- Mida el periodo de oscilación **T** con el cronometro y repita la medida del periodo 10 veces.
- Realizar nuevamente el paso anterior cambiando la longitud del péndulo **L;** los nuevos valores: 0,25m; 0,35 m; 0,45m, 0,60 m; 0,80m; 1,00 m; 1,25 m; 1,50 m, con cada nueva longitud y su correspondientes promedio de período $\bar{\mathbf{T}}$ se forman las parejas de datos que constituyen la información experimental de la tabla 2.

Asignación propuesta para las variables.

Eje vertical $\quad \mathrm{Vd} \rightarrow \bar{\mathrm{T}}(\mathrm{s})$ $\qquad$ Eje horizontal $\quad \mathrm{Vi} \rightarrow \mathrm{L}\,(\mathrm{m})$

Si el subgrupo de trabajo desea emplear otra propuesta no dude en hacerlo, pero la sustentan.

Medida N_o	L_i Eje horizontal	$\bar{T}_i$ Eje vertical	$[L_i] = \ln L_i$	$[\bar{T}_i] = \ln \bar{T}_i$	$[L_i]^2$	$[L_i] * [\bar{T}_i]$
1	0,15					
2	0,25					
3	0,35					
4	0,45					
5	0,60					
6	0,80					
7	1,00					
8	1,25					
9	1,50					
$n =$			$\Sigma[L_i] =$	$\Sigma[\bar{T}_i] =$	$\Sigma[L_i]^2 =$	$\Sigma[L_i] * [\bar{T}_i] =$

Tabla 2 Cuadro de datos experimentales para elaborar la primera figura por análisis grafico con **variables no lineales** tomando los datos de las columnas 2 y 3. Las restantes 4, 5, 6, y 7 columnas de la derecha, junto con la 1 de la izquierda, sirven para calcular y generar las cantidades requeridas en la **regresión no lineal**.

6 ANALISIS DE DATOS E INFORMACION EXPERIMENTAL

Los métodos empleados; análisis gráfico, con los cambios necesarios de variable y regresión no lineal, se reconocen como caminos independientes y complementarios para procesar información obtenida en experimentos de laboratorio o procesos industriales y generar las **funciones no lineales** a que den lugar como resultado de éste tratamiento.

La información recolectada se recomienda y propone procesar a través de los anteriores métodos expuestos, sin embargo si desea emplear otros métodos no se detenga úselos pero exprese sus ventajas.

6.1 ANALISIS GRAFICO DE FUNCIÓNES NO LINEALES

1) Emplear los valores experimentales de **L** y $\overline{\mathbf{T}}$ consignados en la tabla 2, para elaborar la respectiva grafica en papel milimetrado, consulte con su profesor como escalar correctamente los ejes, para ubicar la totalidad de los datos experimentales al emplear la máxima área disponible del papel milimetrado.
2) Se le sugiere observar cuidadosamente la curva experimental encontrada y compararla con las expuestas en el numeral 2.1; Si encuentra alguna similitud con una de ellas entonces proponga la hipótesis respectiva y el cambio de variable necesario para volver lineal la función y pruebe si su hipótesis es correcta, para ello haga la nueva tabla de datos y su correspondiente grafica, incluya el cambio de variable respectivo.
3) Si el exponente sugerido como cambio en la variable independiente, genera una razonable recta, entonces trace usted aquella, que mejor represente los puntos geométricos de los pares ordenados y tenga en cuenta que aunque no todos los puntos quedan sobre o dentro de la recta, se espera que los puntos muestren ésta tendencia.
4) Seleccione dos puntos experimentales y calcule la pendiente de la grafica,

   para ello emplee la expresión $\tan\theta = \dfrac{\Delta \overline{T}}{\Delta L^{?}} = \dfrac{\overline{T}_{(final)} - \overline{T}_{(inicial)}}{L^{?}_{(final)} - L^{?}_{(inicial)}} = Cte$

   Nota: *El signo de interrogación pregunta sobre el exponente propuesto en la variable independiente en la hipótesis exitosa y lo debe aplicar en la ecuación anterior*.

   Emplee las unidades correctas y necesarias para expresar la constante de proporcionalidad con sus dimensiones respectivas; no confundir con el valor del ángulo θ, son dos cosas distintas. ¿Quién es y que representa físicamente la constante?
5) Exprese la función no lineal que relaciona las variables experimentales con las constantes calculadas ¿La ecuación construida, le resulta familiar o conoce alguna expresión similar con la cual haya trabajado antes durante sus estudios? Si es así, indique donde y cuando la empleo.
6) Podría interpolar y extrapolar la grafica construida, explique como lo haría y con qué objetivo y como lo explica.
7) Consulte el método, para graficar en papel logarítmico y exprese las diferencias.

6.2 ANALISIS REGRESION NO LINEAL

1) Realice las operaciones, sobre cada una de las variables indicadas en los renglones superiores 4, 5, 6, y 7 de la tabla 2.
2) Efectúe las sumas que se encuentran en las celdas del último renglón, en la misma tabla 2.
3) Reemplace las cantidades obtenidas anteriormente en las correspondientes ecuaciones 7 y 8 para obtener las constantes a y b; conocido éste último valor, calcule la constante k con la ecuación 9.
4) Escriba la función no lineal de la misma estructura de la ecuación 10, que contenga las variables experimentales $\mathbf{L}$ y $\bar{\mathbf{T}}$.
5) Explique las diferencias o similitudes encontradas al compararla con la ecuación obtenida por análisis gráfico.
6) Utilice su calculadora para encontrar la ecuación, empleando los datos experimentales y explique sus resultados.

7 CONCLUSIONES ANALISIS GRAFICO

1) Al observar la tendencia de la curva en la primera grafica experimental, se permite inicialmente proponer una hipótesis, que intenta satisfacer la relación entre las variables que las convierte en lineales, indique si la hipótesis propuesta fue la correcta y explique el criterio que le permite tal selección de cambio de variable, de lo contrario establezca como resolvió la dificultad.
2) Cuando se aplica la hipótesis correcta, se reproduce una línea recta no necesariamente perfecta, de éste razonamiento, al experimentador le cabe establecer las siguientes conclusiones (escriba todas las que considere pertinentes y necesarias).
3) Escriba la ecuación general o *función no lineal* del periodo de oscilación $\mathbf{T}$ en función de la longitud $\mathbf{L}$ del péndulo, derivada del trabajo en el laboratorio y ahora con la *aplicación de la hermenéutica* establezca tan objetivamente como pueda su grado de comprensión.
4) Con base en el trabajo desarrollado, ¿encuentra asociación entre la ecuación anterior y la ecuación construida? Discuta sus resultados con los compañeros del laboratorio y expréselos por escrito, *por favor no reproduzca literalmente lo que aparece en las páginas de* INTERNET.

7 CONCLUSIONES REGRESION NO LINEAL

1) Existen diferentes procedimientos para construir ecuaciones en las ciencias físicas que se corresponden con ***funciones no lineales*** identifique las diferencias, escríbalas y sustente con sus argumentos.
2) ¿Qué importancia desde la experimentación tiene para el investigador, conocer las magnitudes de las constante a y b en el laboratorio.
3) Escriba las diferencias surgidas de las diferentes ecuaciones para el mismo experimento.

Apéndice A

Ejemplo de aplicación gráfica función cuadrática

EXPERIMENTO CASERO
Proporcionalidad entre la longitud de un cuadrado y su área

Existen abundantes situaciones, donde el exponente $n = 2$; en las ciencias básicas y para evidenciar éste tipo de relaciones entre variables, se recomienda el siguiente caso simple con el cual se pretende examinar la posible dependencia existente entre la longitud del lado " L " de un cuadrado y su superficie " S "quien representada su área, en número de cuadritos, tal como se muestra para cada una de las formas de la figura A1 y cuyos respectivos valores se encuentran consignados en la tabla A1.

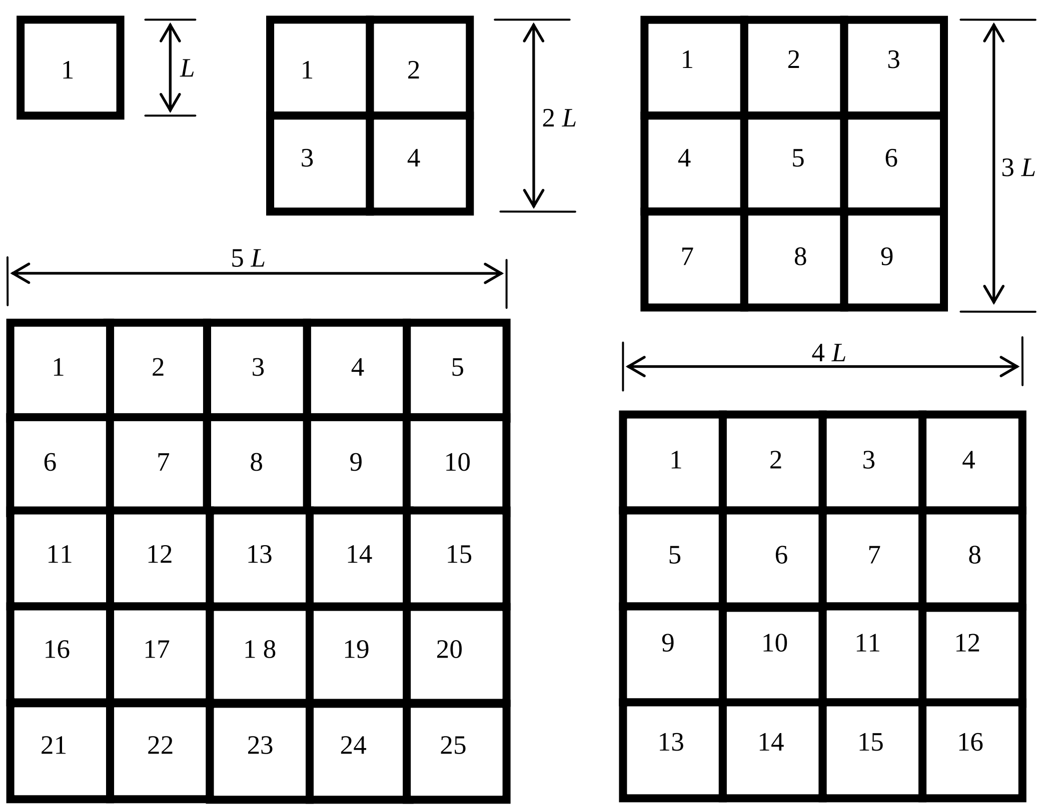

Figura A1 Conjunto de solo 5 cuadros, podrían ser muchos más; para **estudiar la relación** que existe entre la longitud "L" del lado de cada cuadrado con su superficie "S" expresada en cuadritos unitarios.

Los datos de la variable S, evidencian que al tomar dos valores cualesquiera consecutivos el "valor posterior es mayor que el valor anterior" de igual manera para la variable L.

$\mathrm{Vd} \to S$ (Superficie numero de cuadros)	1	4	9	16	25	36	49	…
$\mathrm{Vi} \to L$ (Longitud de lado del cuadro)	1	2	3	4	5	6	7	…

Tabla A1 Valores obtenidos del ejemplo expuesto para visualizar la relación entre variables no lineales que cumplen el caso con exponente $n = 2$

Dos valores consecutivos tomados arbitrariamente denotan igualmente que "valor posterior es mayor que el valor anterior" de donde se concluye que son variables crecientes.

Se escogen las variables así:

$\mathrm{Vd} \to S$ *Eje vertical*

$\mathrm{Vi} \to L$ *Eje horizontal*

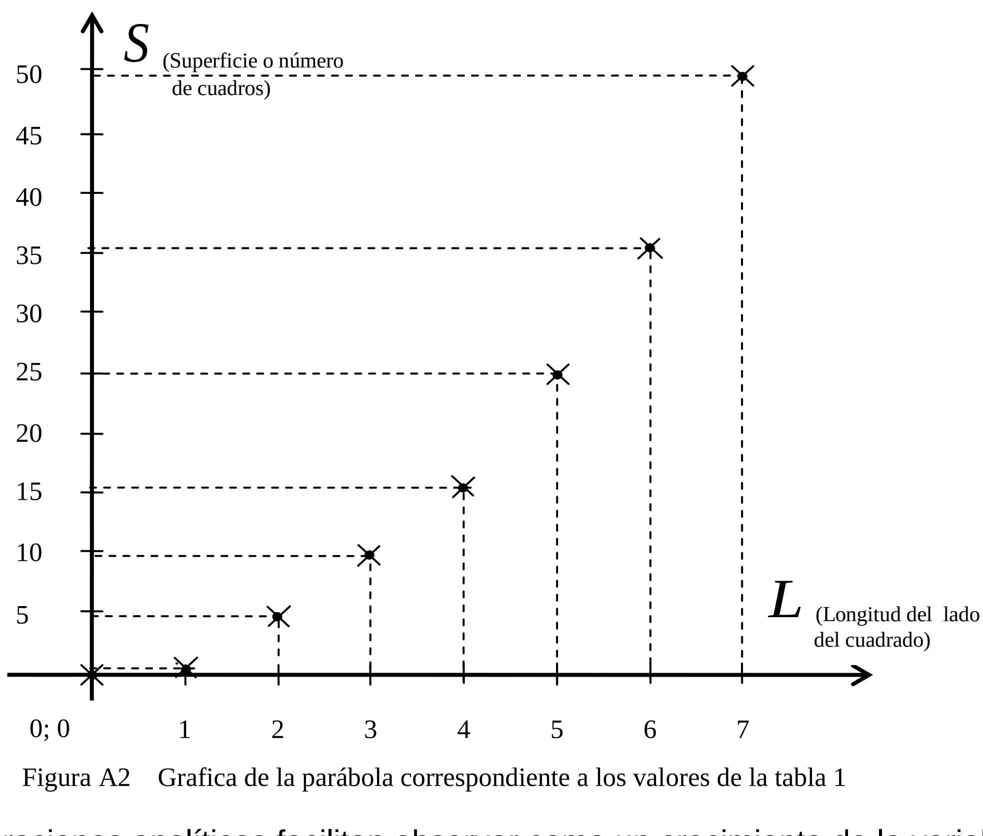

Figura A2 Grafica de la parábola correspondiente a los valores de la tabla 1

Las comparaciones analíticas facilitan observar como un crecimiento de la variable ***S*** está acompañado de un crecimiento de la otra variable ***L*** aunque no en la misma proporción, porque se incrementa más rápidamente ***S*** que ***L***; se denotara así: $S \uparrow\uparrow$ *mientras* $L \uparrow$.

Los lugares geométricos correspondientes con las cantidades de la tabla anterior se visualizan en la figura A2, donde se infiere razonablemente, que la curva resultante es una parábola, fundamento para proponer la ***hipótesis*** "***la superficie de todo polígono cuadrado es proporcional con el cuadrado del lado correspondiente"***, su notación es: $S \propto L^2$; en consecuencia se sugiere una correspondencia en cambio de variables de la forma asignada siguiente:

$\mathrm{Vd} \to S$

$\mathrm{Vi}^* \to L^2$ Criterio de prueba de la validez de la hipótesis.

El nuevo conjunto de variables; aunque con rigor, solo cambia la variable Vi genera la tabla de valores siguiente.

$\mathrm{Vd} \to S$ (Superficie, número cuadros)	1	4	9	16	25	36	49	…
$\mathrm{Vi}^* \to L^2$ (Longitud de lado del cuadro) ^{2}	1	4	9	16	25	36	49	…

Tabla A2 Nuevos valores de la variable $\mathrm{Vi}^* \to L^2$ correspondiente al cambio propuesto.

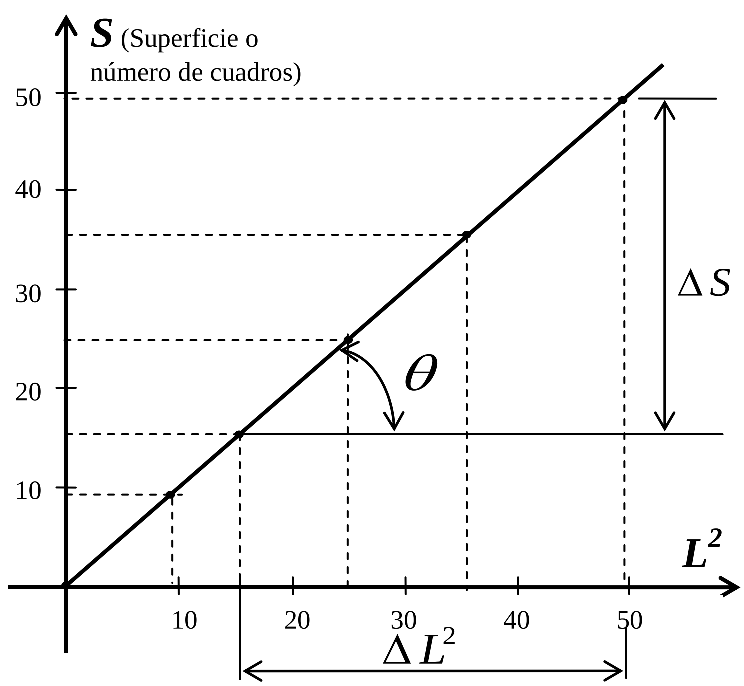

Figura A3 Grafica de S en función de la nueva variable L^2.

La gráfica de los datos de la tabla precedente muestra una ***línea recta*** y se ha probado la veracidad de la hipótesis planteada. Sigue ahora responder las pregunta obligada: ¿Cuánto vale la constante? y para ello se calcula la función tangente del ángulo θ formado por la recta experimental con la horizontal, conforme la figura A3 así:

$$\tan\,\theta = \frac{\Delta S}{\Delta L^2} = \frac{S_{(final)} - S_{(inicial)}}{L^2_{(final)} - L^2_{(inicial)}} \;=\; Cte$$ Reemplazando los valores, se tiene

$$\tan\,\theta = \frac{(49-16)}{(7^2-4^2)} = 1 \qquad\qquad \Rightarrow\; Cte = 1$$

De donde se infiere que la constante de proporcionalidad es la ***unidad*** y permite construir la ecuación $S = 1\,L^2$ (A1)

Que tiene la misma estructura del numeral 2.2.1 correspondiente a **la parábola** o como se expresa comúnmente $S = L^2$ cuyo significado es bien conocido, "en todo polígono cuadrado su área es equivalente a tomar el lado y elevarlo al cuadrado".

Apéndice B

Ejemplo de aplicación gráfica función inversa

EXPERIMENTO DE LABORATORIO
Relación entre la Intensidad de corriente I y la resistencia eléctrica R en un circuito serie simple

Estudio de la relación entre intensidad de corriente I en (mA), y resistencia variable R en (Ω). Es energizado el circuito con una fuente de voltaje DC, de magnitud constante 6,2 Volt, al variar la resistencia eléctrica, se estudia el cambio en la intensidad de corriente eléctrica que circulaba por el circuito, se registro 13 parejas de datos de intensidad de corriente I y resistencia R.

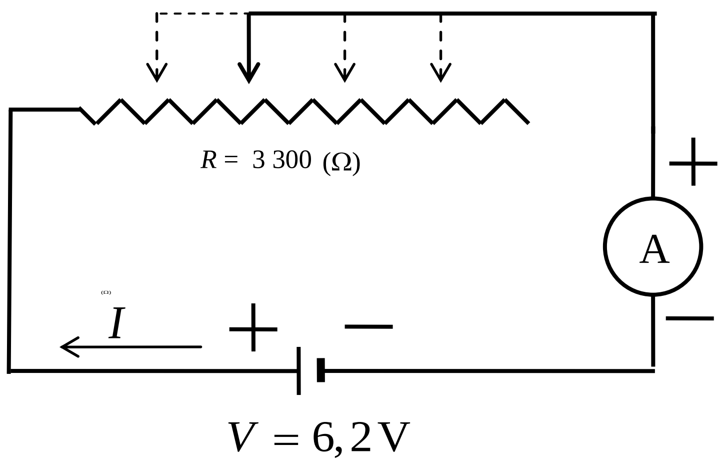

Figura B1 Circuito puramente resistivo para estudiar el comportamiento de la intensidad de corriente I en función de la resistencia R.

El grupo de valores experimentales registrados en la tabla B1 corresponden a la selección de variables mostrada a continuación.

Variables Físicas experimentales $\text{Vd} \rightarrow I\,(\text{mA})\ \textit{eje vertical}$
$\text{Vi} \rightarrow R(\Omega)\ \textit{eje horizontal}$

Medida No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
I (mA)	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	15,0	20,0	30,0	40,0	50,0	70,0	85,0	100,0
R (Ω)	3440	1709	1133	830	670	446	328	210,3	162,6	131,8	91,7	76,2	63,5
Escalar en cm	17,25	8,55	5,66	4,15	3,35	2,23	1,64	1,05	0,81	0,66	0,46	0,38	0,32

Tabla B1 Registro de los valores del experimento del circuito resistivo.

NOTA: Para el análisis gráfico en la tabla B1 la fila "Escalar en cm" corresponde a las divisiones correspondientes solo en el eje horizontal para ubicar los valores de la resistencia eléctrica.

De la información consignada en la tabla anterior se procede inicialmente a identificar los valores extremos o limites de cada variable.

Limite superior $I = 100$ mA Limite superior de $R = 3\,440\ \Omega$
Limite inferior $I = 2,0$ mA Limite inferior de $R = 63,5\ \Omega$

A continuación se evalúa el comportamiento de cada variable de la tabla B1, es decir se comparan por parejas, valores consecutivos así: de I se toman las medidas 1 y 2 para establecer que el ***valor posterior*** I_2 = 4,0 mA <u>es mayor</u> que el ***valor anterior*** I_1 = 2,0 mA como se observa claramente en los datos de la tabla, comportamiento que guarda regularidad hasta agotar todas las comparaciones posibles, de donde se concluye, $Si\ valor\ I_2\ es > que\ valor\ I_1 \Rightarrow I\ es\ CRECIENTE$.
Para la variable R se encuentra lo contrario al comparar las magnitudes de las medidas correspondientes 1 y 2 porque ***valor posterior*** R_2 = 1 709 (Ω) <u>es menor</u> que ***valor anterior*** R_1 = 3 440 (Ω), igualmente la pareja siguiente, medidas 2 y 3, pues valor posterior R_3 = 1 133 (Ω) es menor que valor anterior R_2 = 1 709 (Ω), el comportamiento evaluado se mantiene sucesivamente de donde se colige $Si\ valor\ R_3\ es < que\ valor\ R_2 \Rightarrow R\ es\ DECRECIENTE$.

El papel milimetrado suministrado, permite sobre el eje vertical disponer hasta 15 cm, sin inconvenientes y para el eje horizontal se puede aprovechar hasta 20 cm, como máximo; donde los valores de intensidad de corriente no presentan problemas para su ubicación, pero al destinar el eje horizontal para la variable resistencia *R,* se advierte que el límite superior es 3 440 Ω, lo cual exige que para poder ubicar todos los valores se procede a escalar dichos valores, lo cual es requerido para así poder representarlos adecuadamente.

Por ejemplo: En el eje horizontal por conveniencia, cada 5 cm equivalen a 1 000 Ω de tal manera que con una simple regla de 3 sabremos cuantos centímetros le corresponden a cada medida particular, así para la resistencia R = 1 709 Ω se tendrá:
Si 5 cm $\rightarrow$ 1 000 Ω
X cm $\rightarrow$ 1 709 Ω $\Rightarrow 8,55\,\mathrm{cm} \rightarrow 1\,709\ \Omega$ (Mirar figura B2)
El renglón inferior de la tabla B1 contiene los correspondientes valores escalados de las respectivas resistencias para simplificar la elaboración de la gráfica I en función de la resistencia eléctrica *R.*

En la figura B2 se ha dispuesto toda la hoja del papel milimetrado como primer cuadrante para graficar sobre el eje vertical la variable intensidad de corriente I (mA) en función de la variable resistencia eléctrica R (Ω) sobre el eje horizontal; el resultado final luego de marcar todos los puntos experimentales muestra una *hipérbola equilátera* denotando que ***cuando crece la variable intensidad de***

corriente I entonces decrece la magnitud de la resistencia eléctrica R; o en notación resumida cuando $I\uparrow \Rightarrow R\downarrow$; ésta observación confirma la sospecha preliminar inferida de la evaluación directa de los valores, sobre el anterior cuadro de datos.

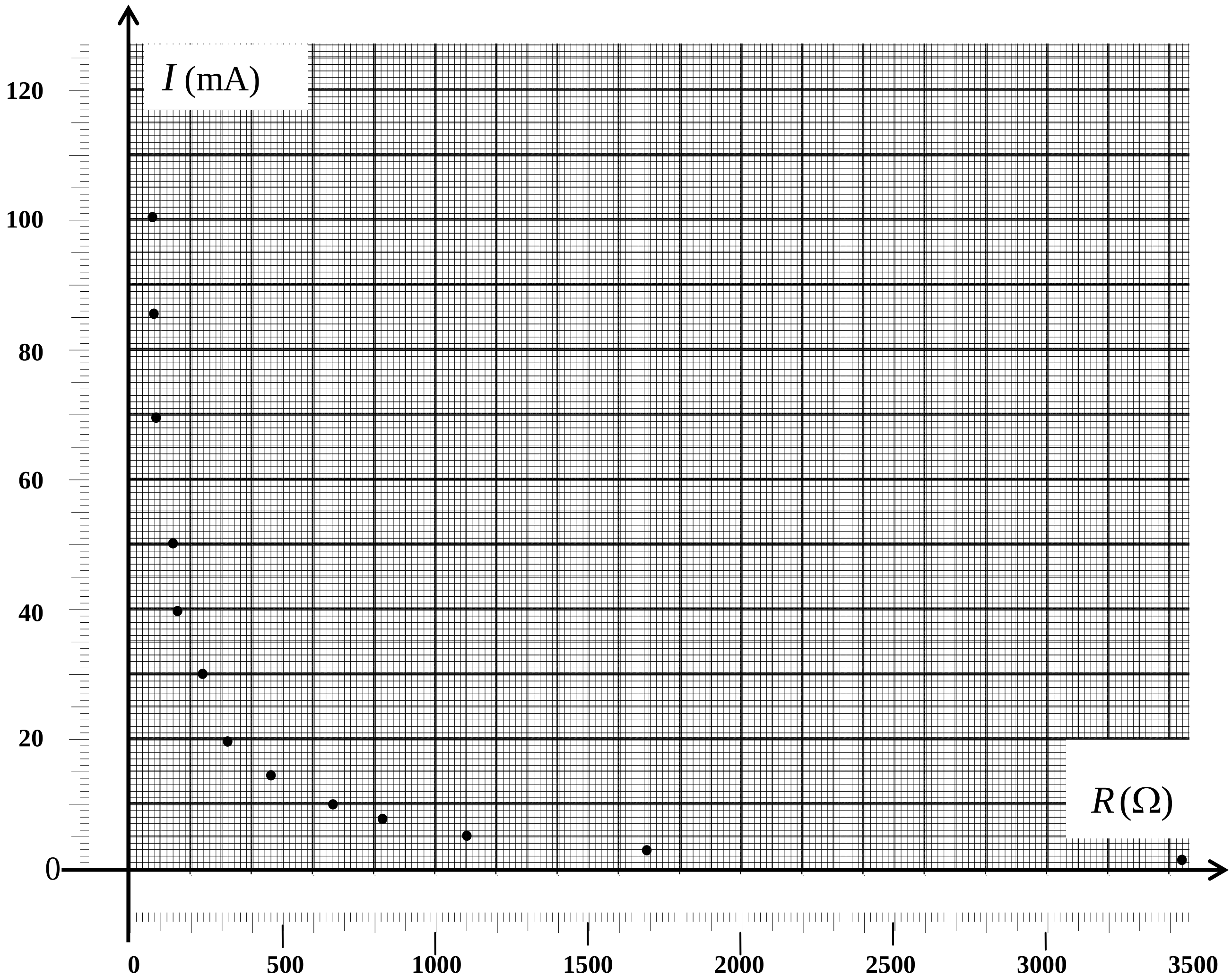

Figura B2 Curve experimental de I (mA) en funcion de R (Ω) con los datos de la tabla B1.

Lo anterior permite plantear la siguiente ***hipótesis "la intensidad de corriente I es inversamente proporcional a la resistencia eléctrica R"***, o en símbolos

$I \propto \frac{1}{R}$. (B1)

Para probar dicha hipótesis B1 se sugiere un cambio solo en la variable resistencia es decir se tendrá otro juego de variables propuestas así: $\mathrm{Vd} \rightarrow I\,(\mathrm{mA})$ $\quad \mathrm{Vi}^* \rightarrow \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\Omega}\right)$ Cuyos cálculos constituyen el nuevo conjunto de valores registrados en el cuadro siguiente; <u>*es de advertir que el renglón inferior queda afectado por el factor de*</u> 10^{-4}

Medida No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
I (mA)	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	15,0	20,0	30,0	40,0	50,0	70,0	85,0	100,0
$\frac{10^{-4}}{R}\left(\frac{1}{\Omega}\right)$	2,91	5,85	8,83	12,04	14,93	22,42	30,48	47,55	61,50	75,87	109,05	131,23	157,5

Tabla B2 Datos generados por cambio de variable en la resistencia, al tomar su inverso.

En la hoja de papel milimetrado se escoge para el eje vertical la intensidad de corriente I, mientras el inverso de la resistencia eléctrica R se ubica en el eje horizontal para marcar sus correspondientes valores, estos puntos muestran inequívocamente una tendencia de ***línea recta***.

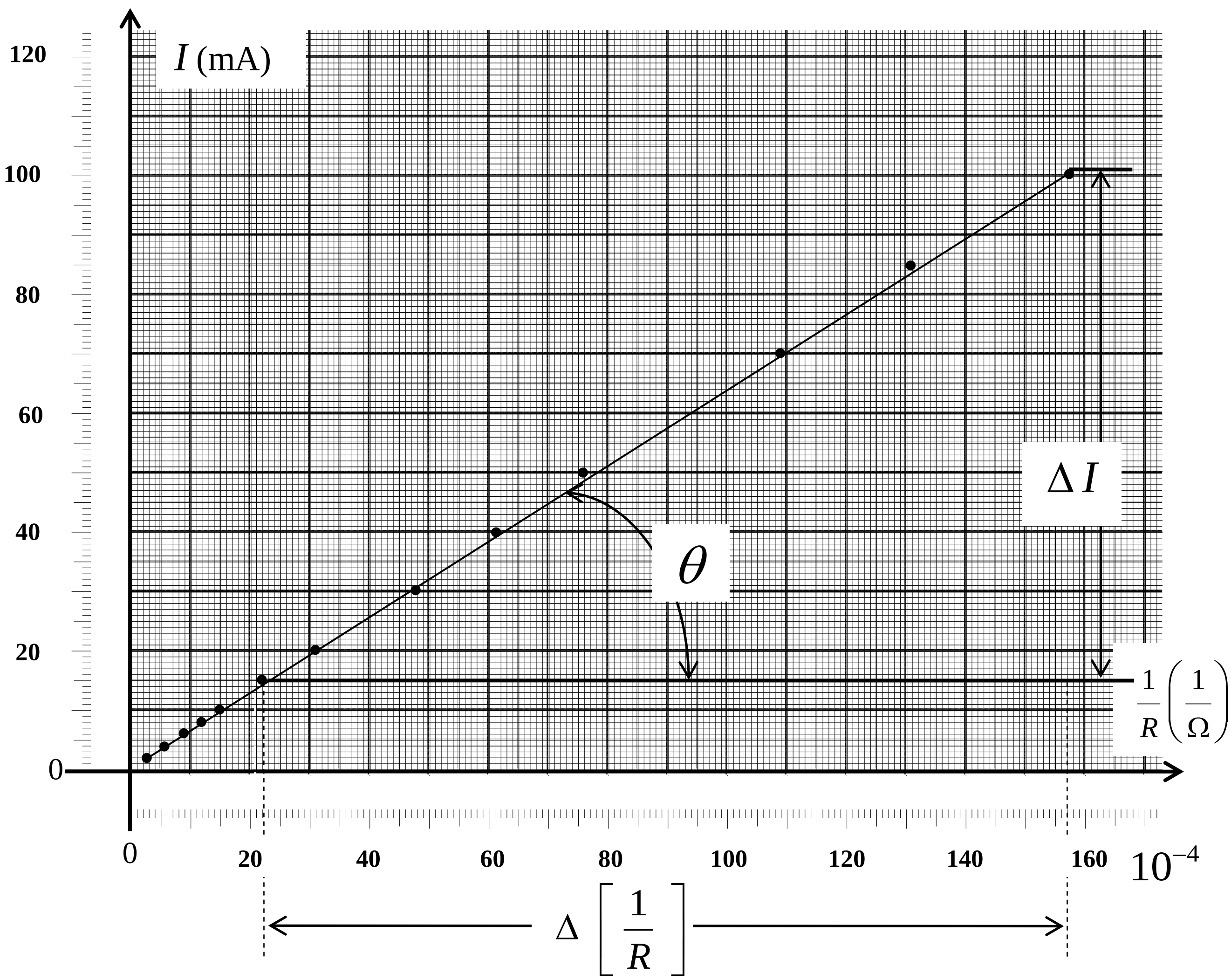

Figura B3 Nueva grafica, por cambio de variable I (mA) en funcion de $\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\Omega}\right)$.

Aunque como era de esperar no todos los puntos quedan sobre la línea recta pues son datos experimentales y no dan medidas exactas, dado que toda mediad conlleva errores múltiples, aun así es legitimo concluir la ***veracidad de la hipótesis planteada.***

La forma final de la ecuación es $I = a\,\dfrac{1}{R}$; (B2)

Es menester sobre la constante de proporcionalidad "a", calcular su magnitud, definir quien es en el experimento y que papel juega.
Su cálculo se determina con la $\tan\theta$, como se visualiza en la figura y a través de la expresión que se denota mas adelante.

$$\tan\theta = \frac{\Delta I}{\Delta\left(\dfrac{1}{R}\right)} = \frac{I_{(final)} - I_{(inicial)}}{\left(\dfrac{1}{R}\right)_{(final)} - \left(\dfrac{1}{R}\right)_{(inicial)}} = a \qquad \text{(B3)}$$

Reemplazando valores se tiene:

$$\tan\theta = \frac{(100 - 15,0)\times 10^{-3}\ \text{A}}{(157,48 - 22,42)\times 10^{-4}\ \Omega} \Rightarrow a = 6,29\ \text{Volt} \qquad \text{(B4)}$$

Claramente la constante "a" por su magnitud y unidades esta íntimamente relacionada con el experimento, lo que es verdad cuando se compara con el valor de la fuente de alimentación del circuito con valor V = 6,2 volt y la ecuación definitiva tiene la forma siguiente;

$$I = 6,29\ \text{volt}\ \frac{1}{R} \qquad \text{(B5)}$$

Si el experimentador decide cambiar la magnitud de la fuente varias veces y repite igualmente el experimento, encuentra que la variación de la ecuación radica en la constante "a" de tal suerte que podrá generalizar su resultado en la siguiente expresión:

$$I = \text{V}\left(\frac{1}{R}\right) \qquad \text{(B6)}$$

Aquí se ha encontrado una cantidad de gran importancia que se define así: "en un circuito eléctrico, el inverso de la resistencia pura $\dfrac{1}{R}$ o la impedancia compleja $\dfrac{1}{Z}$ se denomina ***admitancia***. Su unidad en el Sistema Internacional es el inverso del ohm, (Ω^{-1}) también se emplea el Siemens, S.

Apéndice C

Ejemplo de aplicación para regresión no lineal

EXPERIMENTO DE LABORATORIO

Estudio de las variables Físicas, Voltaje $V\,(\mathrm{V})$ ***e Intensidad de corriente*** $I\,(\mathrm{A})$ ***de un elemento resistivo no lineal o no óhmico***

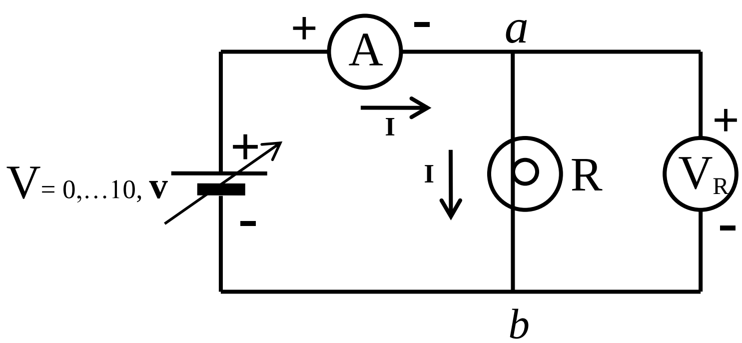

Figura C.1 Montaje experimental de un circuito eléctrico con una lámpara incandescente o bombillo, elemento no óhmico (no lineal).

Entre los puntos ***a*** y ***b*** se conecto un bombillo de resistencia *R* = 4,7 Ω valor medido con óhmetro.

V (V)	I (mA)	V (V)	I (mA)
0,5	35	5,5	160
1,0	45	60,	170
1,5	65	6,5	175
2,0	85	7,0	180
2,5	100	7,5	190
3,0	110	8,0	195
3,5	120	8,5	205
4,0	130	9,0	210
4,5	140	9,5	215
5,0	150	10,0	220

Tabla C.1 Cuadro de datos del experimento “elemento no óhmico”

Valores de las variables **Intensidad de corriente** I, y **Voltaje** V durante un experimento real con las cantidades requeridas para aplicar la técnica de regresión “no lineal”, además su correlación con las redefiniciones de las variables independientes Vi y la dependiente Vd y de éste trabajo.

$\mathrm{Vi} \to I\,(\mathrm{mA})$ Redefinición de variable $[\,I\,] = \ln I(\mathrm{mA})$

$\mathrm{Vd} \to V\,(\mathrm{V})$ Redefinición de variable $[\,V\,] = \ln V(\mathrm{V})$

No son valores absolutos y se recomienda
trabajar con cuatro decimales, por ser logaritmos

$$------\downarrow------$$

1	2	3	4	5	6	7
Medida N_o	$\mathrm{Vd} \to V\,(\mathrm{V})$	$\mathrm{Vi} \to I\,(\mathrm{mA})$	$[V] = \ln V$	$[I] = \ln I$	$[I]^2$	$[I] \cdot [V]$
1	0,5	35	-0,6931	3,5553	12,6401	-2,4641
2	1,0	45	0,0	4,0073	16,0584	0,0
3	1,5	65	0,4054	4,3174	18,6399	1,7502
4	2,0	85	0,6931	4,4426	19,7366	3,0791
5	2,5	100	0,9162	4,6051	21,2069	4,2191
6	3,0	110	1,0986	4,7004	22,0937	5,1638
7	3,5	120	1,2527	4,7874	22,9191	5,9971
8	4,0	130	1,3862	4,8675	23,6925	6,7473
9	4,5	140	1,5040	4,9416	24,4194	7,4321
10	5,0	150	1,6094	5,0106	25,1604	8,0640
11	5,5	160	1,7047	5,0434	25,4358	8,5974
12	6,0	170	1,7917	5,1357	26,3754	9,2016
13	6,5	175	1,8718	5,1647	26,6741	9,6672
14	7,0	180	1,9459	5,1929	26,9662	10,1048
15	7,5	190	2,0149	5,2470	27,5310	10,5721
16	8,0	195	2,0794	5,2729	27,8034	10,9644
17	8,5	205	2,1400	5,3230	28,3343	11,3912
18	9,0	210	2,1972	5,3471	28,5914	11,7486
19	9,5	215	2,2512	5,3706	28,8444	12,0902
20	10,0	220	2,3025	5,3936	29,0909	12,4187
$n = 20$			$\Sigma = 29{,}1649$	$\Sigma = 97{,}72$	$\Sigma = 482{,}20$	$\Sigma = 146{,}7448$

Tabla C.2 Procesamiento de datos experimentales para construir la ecuación no lineal “asociada a un elemento no óhmico”

Al resolver las operaciones indicadas en el renglón superior del cuadro anterior aplicadas sobre las variables redefinidas, se facilitan las sumas finales registradas en las celdas inferiores, valores reemplazados en las ecuaciones correspondientes para hallar las constantes requeridas que genera, la función no lineal que integra las variables experimentales.

Calculo de los parámetros:

$$a = \frac{20[146{,}7448] - [97{,}72][29{,}1649]}{20[482{,}20] - [9588{,}3264]} \qquad a = 1{,}42 \approx 1{,}5$$

$$b = \frac{[29{,}1649][482{,}20] - [97{,}92][146{,}7448]}{20[482{,}20] - [9588{,}3264]} \qquad b = \frac{305{,}9361}{55{,}676} = -5{,}4949$$

$$\rightarrow \; k = e^{-5{,}4949}\,\Omega \qquad \Rightarrow \; k = 4{,}10 \times 10^{-3}\,\Omega$$

De ésta manera la ecuación final asume la forma ilustrada a continuación

$$V = 4{,}1 \times 10^{-3}\,\Omega\; I^{1{,}5} \quad \text{O también} \quad V = 4{,}1 \times 10^{-3}\,\Omega\, I^{\frac{3}{2}} \qquad \text{(C1)}$$

Es evidente que la relación encontrada es del tipo ***no lineal*** porque la potencia a la cual se encuentra elevada la variable intensidad es un fraccionario, de otra parte existe aparentemente una coincidencia entre la magnitud de la resistencia inicial de la bombilla con el valor de la constante k, incluida sus unidades de medida pero queda claro en el laboratorio, que al circular cada vez mayor cantidad de corriente eléctrica por el filamento de la lámpara se observara mayor intensidad luminosa concomitante con un notable incremento de la temperatura en la resistencia.

Apéndice D

Ejercicios de aplicación para análisis grafico y regresión no lineal para funciones no lineales

EXPERIMENTO DE LABORATORIO

Refracción de la luz. Estudio de variables Físicas, Angulo de incidencia θ_i y Angulo transmitido θ_t de haz o rayo luminoso a través de materiales transparentes.

Ejercicio de aplicación Análisis Gráfico por ***cambio de variable***

Con el empleo de ésta técnica construir las ecuaciones de los siguientes dos casos:

1º estudio de la transmisión de la luz desde el acrílico hacia el aire y 2º estudio de la transmisión de la luz desde el agua hacia el aire, para generalizar y construir la ecuación algebraica que representa la ley de Snell de la refracción.

Camino óptico

Acrílico-Aire		Agua-Aire	
θ_i	θ_t	θ_i	θ_t
5	7	5	6
10	15	10	13
15	22	15	20
20	30	20	27
25	38	25	34
30	47	30	42
35	58	35	50
40	72	40	59

Tabla D1 Índices de refracción experimentales del acrílico y el agua.

Inicialmente elabore las graficas asignando en el eje horizontal la variable ángulo transmitido θ_t y en el eje vertical el ángulo incidente θ_i. Si las graficas obtenidas no le proporcionan líneas rectas; entonces se le sugiere a usted amable lector que haga un cambio de variable y una nueva tabla con la "Función Seno" calculada sobre cada una de los valores de los ángulos de la tabla y elabore las nuevas graficas de las nuevas variables seno del ángulo transmitido "$\text{sen}\,\theta_t$" en el eje horizontal y seno del ángulo incidente $\text{sen}\,\theta_i$ sobre el eje vertical.

Apéndice E

EXPERIMENTOS DE LABORATORIO

Estudio de los gases. Análisis de variables Físicas, Volumen "V" y presión "P" de un gas confinado dentro de un recipiente.

Ejercicio de aplicación *de* **regresión no lineal**.

La tabla E1 contiene información experimental, "la variación del volumen V (ml) de un gas en mililitros al modificar su presión P (Pa) dentro de un recipiente".

V(ml)	P (Pa)
0,10	0,017
0,40	0,413
0,70	1,497
0,90	2,668
1,10	4,233
1,30	6,217
1,50	8,640
1,70	11,522
1,90	14,880
2,10	18,732

Tabla E1 Valores experimentales de presión y volumen.

Hallar los nuevos valores correspondientes de la potencia y el coeficiente que permitan conocer la nueva ecuación que relaciona la variable volumen "V" en mililitros con la variable presión "P" en pascales. Escriba las ecuaciones en su forma definitiva y realice el análisis dimensional y de unidades correspondientes.